탄성파이론 중 간 시 험 [25점]

숭실대 대학원 기계공학과 2015. 10. 20.

1.[1점] <탄성파이론> 교과목의 개요와 목표를 설명하는 표현에서 ( ) 안에 들어갈 단어를 제시하시오.

개요 : (①)에서의 역학적 (②)을 대상으로, 매질 내부에서 (③)의 전파와 매질 경계면에서 (③)의 반사/투과/굴절 등을 (④)으로 다룸.

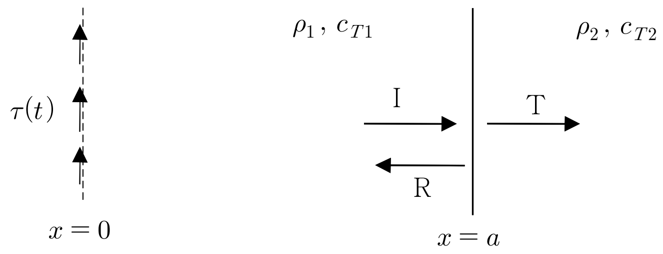
목표 : (⑤) 센서/액추에이터 기술 응용의 (④) 기반을 갖춤.

2.[6점] 다음 두 가지 유형의 1차원 탄성파(elastic wave)의 운동방정식과 전파속도를 유도하시오. 변위, 변형률, 응력, 평형방정식 순으로 제시하고, 매질의 elastic modulus E, shear modulus G, Poisson's ratio ν, mass density ρ를 사용함.

(a) 봉에서의 종파 (longitudinal waves in a bar)

(b) 무한 공간에서의 횡파 (transverse waves in an infinite space)

3.[6점] 두 개의 반 무한 공간의 경계면(interface)에 수직으로 입사한 transverse wave가 반사와 투과할 때 전단응력의 반사율과 투과율을 구하시오. 입사 쪽 매질의 밀도 ρ_1과 전파속도 c_{T1}, 투과 쪽 매질의 밀도 ρ_2와 전파속도 c_{T2}를 사용하여 표현함.



4.[6점] 일반적인 동탄성(dynamic elasticity) 문제는 다음 식들로 표현될 수 있다.

stress equation of motion $\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$ ⋯ ①

stress-strain relation $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}$ ⋯ ②

strain-displacement relation $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ⋯ ③

(a) xyz 직각좌표계의 변위 $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ 를 사용하여 위의 세 식을 다음과 같이 바꾸어 표현하시오.

1) i = 1 일 때, ①식

2) i = 3 이고 j = 3 일 때, ②식

3) i = 2 이고 j = 1 일 때, ③식

(b) 위의 세 식을 조합하여, 다음의 변위 운동방정식(displacement equation of motion)을 유도하시오.

1) 무한 공간에서 x_3방향으로 진동하며 $x_1 x_2$평면 방향으로 전파하는 횡파(transverse wave)의 운동방정식

2) 무한 공간에서 $x_1 x_2$ 면내에서 진동하며 $x_1 x_2$평면 방향으로 전파하는 종파(longitudinal wave)의 운동방정식

5.[6점] 균질(homogeneous), 등방성(isotropic), 완전탄성(linearly elastic) 매질에서 전파하는 탄성파의 운동방정식은

$$G \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + G) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \qquad \left(\nabla = \boldsymbol{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

로 표현된다.

(a) 이러한 매질로 이루어진 무한공간에서 전파하는 평면파(plane wave)에는 2종류가 있다. 평면파 변위를 potential로써 $\boldsymbol{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$ 로 표현하여, 2종류 평면파의 파동방정식을 유도하시오.

(b) 위 식을 다르게 표현하면 다음과 같다.

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ij} = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

i = 1일 때, 2일 때, 3일 때의 방정식을 각각 제시하고, 이들을 좌표 x, y, z 및 변위 u, v, w에 의한 방정식들로 표현하시오.

\- 끝 -

탄성파이론 학 기 말 시 험 [25점]

숭실대 대학원 기계공학과 2015. 12. 15.

1.[8점] 단면이 원형인 막대(밀도 ρ, 탄성계수 λ, G)에서 축대칭의 축방향 전단 운동(axial shear motion)이 있을 때, 그 운동은 축방향의 변위 $w(r,t)$로 표현된다. 막대의 원주면은 자유(free)롭다.

(a) 이 막대 내의 전단변형률 성분 $\gamma_{\theta z}$, γ_{zr}, $\gamma_{r\theta}$ 및 전단응력 성분 $\tau_{\theta z}$, τ_{zr}, $\tau_{r\theta}$를 변위 w 및 좌표 r로 표현하시오.

(b) 원형 막대 내의 한 요소 주변의 응력들에 의해 반경방향으로 가해지는 힘들의 평형을 고려하여 다음과 같은 응력 운동방정식을 유도하시오.

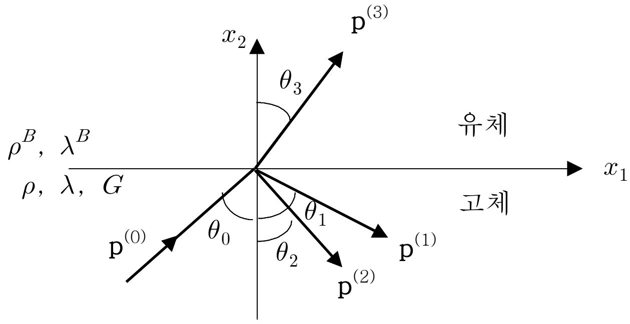
$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\tau_{zr} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(c) 위의 결과로부터 다음과 같은 변위 운동방정식을 유도하시오.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(d) $w(r,t) = W(r)\,e^{i\omega t}$ 로 변수분리하여, $W(r)$에 대한 미분방정식을 도출하고, $W(r)$의 해의 형태를 제시하시오.

2.[10점] 반무한 고체와 반무한 유체가 접해 있는 경계면을 향해 그림과 같이 고체 쪽에서 P-wave(종파)가 입사하고 있다. 이때에 경계면에서 반사와 굴절이 일어난다.



(a) 입사파의 변위 벡터를

$$\mathrm{u}^{(0)} = A_0\ (\sin\theta_0\ \mathrm{i}_1 + \cos\theta_0\ \mathrm{i}_2)\ \exp[i k_0\ (x_1 \sin\theta_0 + x_2 \cos\theta_0 - c_L t)]$$

라고 표현할 때, 반사파와 굴절파의 변위 벡터 $\mathrm{u}^{(1)}$, $\mathrm{u}^{(2)}$, $\mathrm{u}^{(3)}$를 각각 표현하시오.

(b) 위의 표현을 이용해 각각의 파동의 수직응력 $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_2^{(1)}$, $\sigma_2^{(2)}$, $\sigma_2^{(3)}$와 전단응력 $\tau_{21}^{(0)}$, $\tau_{21}^{(1)}$, $\tau_{21}^{(2)}$, $\tau_{21}^{(3)}$을 표현하시오.

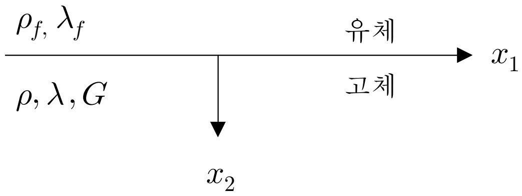
(c) x_2=0인 경계면에서 만족되어야 하는 경계조건을 설정하고, 위에서 구한 표현들을 대입하여 정리하시오.

(d) 이 식들이 만족되기 위한 조건으로부터, wavenumber k_1, k_2, k_3와 k_0의 관계를 제시하고 각도 θ_1, θ_2, θ_3와 θ_0의 관계를 제시하시오.

(e) 입사각 θ_0가 0이 아닌 이 문제의 경우와 θ_0가 0인 특별한 경우에 나타나는 결과의 차이는 무엇인지 설명하시오.

(뒷면에 계속)

3.[7점] 반무한 공간을 차지하는 탄성 고체의 표면을 따라 전파하는 Rayleigh 표면파는 다음 그림과 같이 고체 표면이 유체에 접해 있을 때 파동 운동이 영향을 받는다. 인접 유체는 비점성 압축성이라 할 때, 그 영향을 이해하기 위하여 다음의 질문들에 답하시오.



(a) 고체에서의 Rayleigh 표면파의 운동을 변위퍼텐셜 $\phi(x_1, x_2, t)$와 $\psi(x_1, x_2, t)$를 이용해 두 개의 운동방정식으로 표현하고, 이때 필요한 종파속도 c_L과 횡파속도 c_T를 Lame상수와 밀도로 표현하시오.

(b) 인접한 유체에서의 파동 운동을 변위퍼텐셜 $\phi_f(x_1, x_2, t)$를 이용해 한 개의 운동방정식으로 표현하고, 이때 필요한 속도 c_f를 표현하시오. 이 유체에서는 고체에서와 달리 운동방정식이 한 개이면 충분한데, 그 이유를 설명하시오.

(c) 변위퍼텐셜들을 변수분리하여

$$\phi(x_1, x_2, t) = \Phi(x_2)\ \exp[i\,(kx_1 - \omega\, t)]$$
$$\psi(x_1, x_2, t) = \Psi(x_2)\ \exp[i\,(kx_1 - \omega\, t)]$$
$$\phi_f(x_1, x_2, t) = \Phi_f(x_2)\ \exp[i\,(kx_1 - \omega\, t)]$$

로 표현한 후 세 개의 운동방정식을 $\Phi(x_2)$, $\Psi(x_2)$, $\Phi_f(x_2)$로 표현하시오.

이때 $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c_L^2} = p^2$, $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c_T^2} = q^2$, $\dfrac{\omega^2}{c_f^2} - k^2 = s^2$ 라고 놓으시오.

* 위 운동방정식들의 해의 형태는 $\Phi(x_2) = A\ \exp(-p x_2)$, $\Psi(x_2) = B\ \exp(-q x_2)$, $\Phi_f(x_2) = C\ \exp(-i\, s\, x_2)$ 라고 할 수 있다.

(d) x_2=0인 경계면에서 만족되어야 할 경계조건을 설정하시오.

(e) 임의 지점에서의 변위 u_2, u_2^f, 응력 σ_2, σ_2^f, τ_{21} 등을 변위퍼텐셜 $\Phi(x_2)$, $\Psi(x_2)$, $\Phi_f(x_2)$를 이용하여 표현하고, (*)에 표현한 해를 대입하여 정리하시오.

(f) 변위와 응력에 대한 (e)의 결과를 경계조건에 대입하고 정리하시오.

(g) 위 (f)에서 얻은 연립방정식이 0이 아닌 해를 갖기 위한 조건을 표현하고, 이 식을 정리하여 다음 식의 ?에 필요한 표현을 구하시오.

$$4\ k^2\, p\, q\ -\ (k^2 + q^2)^2\ =\ ?$$

(보너스) 위의 결과에서 얻게 되는 wavenumber k는 복소수($k_R + i\, k_I$)이다. 이 표현의 허수부분의 물리적 의미를 설명하시오.

- 끝 -