탄성파이론 중 간 시 험 [25점]

숭실대 대학원 기계공학과 2012. 4. 19.

1.[4점] 탄성파(elastic wave) 해석(analysis)을 위해서 탄성학 기본 식들이 필요하다. 등방성 탄성체에 3차원 좌표계 xyz를 설정할 때, 수직응력(normal stress) σ_x, σ_y, σ_z 및 전단응력(shear stress) τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} 들과 수직변형률(normal strain) ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z 및 전단변형률(shear strain) γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} 들 간의 관계를 요약하고자 한다.

(a) Young's modulus E, shear modulus G, Poisson's ratio ν를 사용하여, 응력과 변형률의 관계식을 제시하시오.

(b) Lame의 탄성상수 λ와 G를 사용하여, 변형률과 응력의 관계식을 제시하시오.

2.[3점] 파동방정식(wave equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

변수분리(separation of variables)법에 의해 조화파(harmonic wave) 해(solution) $u(x,t)$를 구하시오.

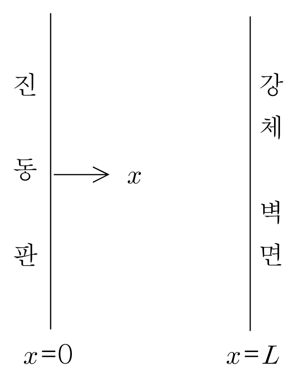
3.[6점] 그림과 같이 폭 L은 유한하나 깊이와 길이가 무한히 큰 용기에, 압축성 이상(ideal) 액체가 담겨 있다. 액체 내의 음압 $p(x,t)$는 다음과 같은 파동방정식의 지배를 받는다.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

한 쪽 벽면(x=L)이 강체이고, 다른 쪽 벽면(x=0)에 조화가진이 다음과 같이 가해지고 있다.

$$p(0,t) = P_0 \sin\omega t$$

이로 인해 액체 내에 형성되는 정상파(standing wave)의 음압 분포 $p(x,t)$를 구하시오.



(뒷면에 계속)

4.[6점] 일반적인 동탄성(dynamic elasticity)문제는 다음 식들로 표현될 수 있다.

stress equation of motion $\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$ ⋯ ①

stress-strain relation $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 G \epsilon_{ij}$ ⋯ ②

strain-displacement relation $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ⋯ ③

(a) xyz 직각좌표계의 변위 $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ 를 사용하여 위의 세 식을 다음과 같이 바꾸어 표현하시오.

1) $i = 3$ 일 때, ①식

2) $i = 2$ 이고 $j = 2$ 일 때, ②식

3) $i = 3$ 이고 $j = 1$ 일 때, ③식

(b) 위의 세 식을 조합하여, 다음의 변위 운동방정식(displacement equation of motion)을 유도하시오.

1) 일반적인 3차원 운동방정식

2) 무한 공간에서 x_3방향으로 운동하며 $x_1 x_2$평면 방향으로 전파하는 횡파(transverse wave)의 운동방정식

5.[6점] 균질(homogeneous), 등방성(isotropic), 완전탄성(linearly elastic) 매질에서 전파하는 탄성파의 운동방정식은

$$G \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + G) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \qquad \left(\nabla = \boldsymbol{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

로 표현된다. 이러한 매질로 이루어진 무한공간에서 전파하는 평면파(plane wave)에는 2종류가 있다.

(a) 평면파 변위를 $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - ct)\, \boldsymbol{d}$ 로 표현하여, 2종류의 평면파가 무엇이며 전파속도는 어떻게 표현되는지 유도하시오.

(b) 평면파 변위를 potential로써 $\boldsymbol{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$ 표현하여, 2종류 평면파의 파동방정식을 유도하시오.

- 끝 -

탄성파이론 학 기 말 시 험 [25점]

숭실대 대학원 기계공학과 2012. 6. 22.

1.[8점] 단면이 원형인 막대(밀도 ρ, 탄성계수 λ, G)에서 축대칭의 회전 전단 운동(rotary shear motion)이 있을 때, 그 운동은 원주방향의 변위 $v(r,t)$로 표현된다. 막대의 원주면은 자유(free)롭다.

(a) 이 막대 내의 전단변형률 성분 $\gamma_{\theta z}$, γ_{zr}, $\gamma_{r\theta}$ 및 전단응력 성분 $\tau_{\theta z}$, τ_{zr}, $\tau_{r\theta}$를 변위 v 및 좌표 r로 표현하시오.

(b) 원형 막대 내의 한 요소 주변의 응력들에 의해 반경방향으로 가해지는 힘들의 평형을 고려하여 다음과 같은 응력 운동방정식을 유도하시오.

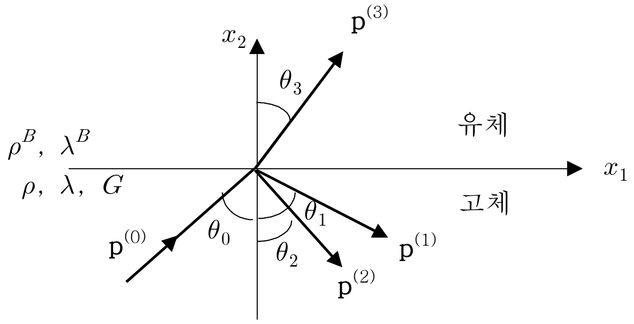
$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

(c) 위의 결과로부터 다음과 같은 변위 운동방정식을 유도하시오.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

(d) $v(r,t) = V(r)\, e^{i\omega t}$ 로 변수분리하여, $V(r)$에 대한 미분방정식을 도출하고, $V(r)$의 해의 형태를 제시하시오.

2.[10점] 반무한 고체와 반무한 유체가 접해 있는 경계면을 향해 그림과 같이 고체 쪽에서 SV파가 입사하고 있다. 이때에 경계면에서 반사와 굴절이 일어난다.



(a) 입사파의 변위 벡터를

$$\mathbf{u}^{(0)} = A_0\ (-\cos\theta_0\ \mathbf{i}_1 + \sin\theta_0\ \mathbf{i}_2)\ \exp[i k_0\ (x_1 \sin\theta_0 + x_2 \cos\theta_0 - c_T t)]$$

라고 표현할 때, 반사파와 굴절파의 변위 벡터 $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{u}^{(3)}$를 각각 표현하시오.

(b) 위의 표현을 이용해 각각의 파동의 수직응력 $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_2^{(1)}$, $\sigma_2^{(2)}$, $\sigma_2^{(3)}$와 전단응력 $\tau_{21}^{(0)}$, $\tau_{21}^{(1)}$, $\tau_{21}^{(2)}$, $\tau_{21}^{(3)}$을 표현하시오.

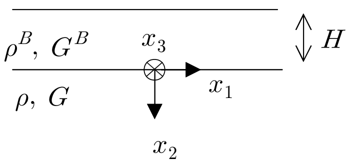
(c) x_2=0인 경계면에서 만족되어야 하는 경계조건을 설정하고, 위에서 구한 표현들을 대입하여 정리하시오.

(d) 이 식들이 만족되기 위한 조건으로부터, wavenumber k_1, k_2, k_3와 k_0의 관계를 제시하고 각도 θ_1, θ_2, θ_3와 θ_0의 관계를 제시하시오.

(e) 입사각 θ_0가 0이 아닌 이 문제의 경우와 θ_0가 0인 특별한 경우에 나타나는 결과의 차이는 무엇인지 설명하시오.

(뒷면에 계속)

3.[4점] Love파는 그림과 같이 층(layer)으로 덮인 반무한 공간에서 표면을 따라 전파하는 SH 표면파이다.



(a) 두 매질에서의 운동방정식을 각각 변위 $u_3(x_1, x_2, t)$와 $u_3^B(x_1, x_2, t)$로 표현하시오.

(b) $x_2>0$ 인 영역에서 해 $u_3(x_1, x_2, t)$의 형태를 제시하시오.

(c) $-H \le x_2 \le 0$ 인 영역에서 해 $u_3^B(x_1, x_2, t)$의 형태를 제시하시오.

(d) $x_2=-H$인 경계면과 $x_2=0$인 경계면에서 경계조건을 설정하시오.

4.[3점] 탄성파 전파에 있어서 분산(dispersion)이란 무엇인가?

- 끝 -