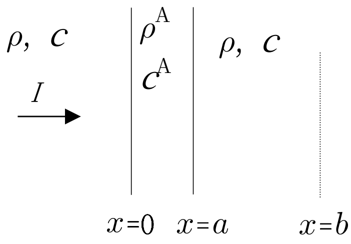
탄성파이론 중 간 시 험 [25점]

숭실대 대학원 기계공학과 2008. 4. 29.

1.[5점] 다음 그림과 같이 일정 두께(a)의 넓은 판재가 두 가지 재질의 반무한체 사이에 완벽하게 접합되어 있다. 왼쪽에서 전파하여 경계면($x=0$)에 입사하는 종파의 응력 함수와 진동속도 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$(\sigma_x)_i = f(t - \frac{x}{c})$$

$$(\dot{u})_i = -\frac{1}{\rho c} f(t - \frac{x}{c})$$



$x=b$인 지점에서 관찰되는 파동 응력을 설명하시오.

2.[6점] 일반적인 동탄성(dynamic elasticity)문제는 다음 식들로 표현될 수 있다.

stress equation of motion $\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$ … ①

stress-strain relation $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}$ … ②

strain-displacement relation $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ … ③

(a) 위의 세 식을 조합하여, 다음의 변위 운동방정식(displacement equation of motion)을 유도하시오.
   1) 일반적인 3차원 운동방정식
   2) 무한 공간에서 x_1방향으로 전파하는 종파(longitudinal wave)의 운동방정식

(b) xyz 직각좌표계의 변위 $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ 등을 사용하여 위의 세 식을 다음과 같이 바꾸어 표현하시오.
   1) i = 2 일 때, ①식
   2) i = 2이고 j = 2 일 때, ②식
   3) i = 1이고 j = 2 일 때, ③식

3.[8점] 균질(homogeneous), 등방성(isotropic), 완전탄성(linearly elastic) 매질에서 전파하는 탄성파의 운동방정식은

$$G\nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + G)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \qquad (\nabla = i_1\frac{\partial}{\partial x_1} + i_2\frac{\partial}{\partial x_2} + i_3\frac{\partial}{\partial x_3})$$

로 표현된다. 이러한 매질로 이루어진 무한공간에서 전파하는 평면파(plane wave)에는 2종류가 있다.

(a) 평면파 변위를 $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - ct)\,\boldsymbol{d}$ 로 표현하여, 2종류의 평면파가 무엇이며 전파속도는 어떻게 표현되는지 유도하시오.

(b) 평면파 변위를 potential로써 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\Psi}$ 표현하여, 2종류 평면파의 파동방정식을 유도하시오.

(뒷면에 계속)

4.[6점] 축대칭 2차원 파동에서 축방향 전단운동(axial shear motion)을 축방향 변위 $w(r,t)$로써 표현한다.

(a) Newton의 운동 제2법칙에 근거하는 힘의 평형(equilibrium)으로부터, 응력 운동 방정식을 유도하시오.

(b) 변형률(strain) $\epsilon_{r,}\, \epsilon_\theta,\, \epsilon_z,\, \gamma_{\theta z},\, \gamma_{zr},\, \gamma_{r\theta}$와 응력(stress) $\sigma_{r,}\, \sigma_\theta,\, \sigma_z,\, \tau_{\theta z},\, \tau_{zr},\, \tau_{r\theta}$ 중 0이 아닌 성분을 변위 w와 전단탄성계수(shear modulus) G로써 표현하고, (a)의 결과에 대입하여 변위 운동방정식을 완성하시오.

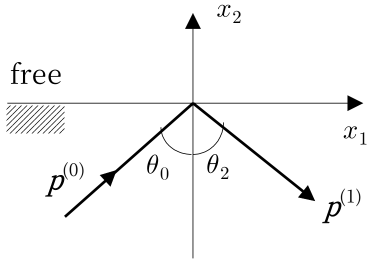
\- 끝 -

탄성파이론 학 기 말 시 험 [25점]

숭실대 대학원 기계공학과 2008. 6. 19.

1.[2점] 탄성파의 반사에서 발생할 수 있는 mode conversion이란 무엇인지 사례 두 가지를 제시하시오.

2.[8점] 압축성(즉, 탄성) 유체에서 운동하는 종파가 $x_2 \leq 0$인 반무한 공간에서 전파하다가 $x_2=0$인 자유경계면에 입사각 θ_0로 입사한 후 반사되고 있다.



(a) $x_2=0$인 경계면에 적절한 경계조건을 설정하시오. 입사파의 운동변위는 $\boldsymbol{u}^{(0)} = A_0 (\sin\theta_0\ \boldsymbol{i}_1 + \cos\theta_0\ \boldsymbol{i}_2) \exp[i\ k_0\ (x_1\ \sin\theta_0 + x_2\ \cos\theta_0 - c_L\, t)]$ 로 표현할 수 있는데, 이에 대응하는 반사파의 운동변위 $\boldsymbol{u}^{(1)}$을 A_1, k_1, θ_1을 이용하여 표현하시오.

(b) 입사파의 수직응력 $\sigma_2^{(0)}$와 반사파의 수직응력 $\sigma_2^{(1)}$를 (a)의 표기를 이용하여 표현하시오.

(c) $x_2<0$인 임의 지점에서의 수직응력 σ_2는 입사파 수직응력 $\sigma_2^{(0)}$와 반사파의 수직응력 $\sigma_2^{(1)}$의 합으로 나타난다. 여기에 경계조건을 설정하여 적용하고, A_1, k_1, θ_1을 A_0, k_0, θ_0와의 관계로써 구하시오.

(d) $\theta_0=0$인 경우라면 반사파는 어떤 결과로 나타날지 (식을 쓰지 말고 문장으로) 설명하시오.

3.[3점] 진폭이 같고 파동수(wavenumber) k가 약간 다르고, 따라서 주파수 ω가 약간 다른 두 평면파의 중첩을 다음과 같이 변위 u의 식으로 표현한다. group velocity c_g의 의미를 설명하고, 이를 phase velocity c 및 wavenumber k와의 관계로 나타내는 식을 유도하시오.

$$u = A\ \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A\ \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

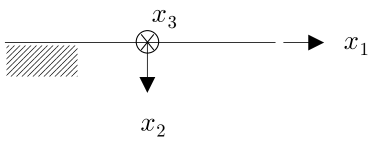
4.[4점] SH-wave의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

반 무한 공간에서 표면파는 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$u_3 = A \exp(-b x_2)\ \exp[i\,k\,(x_1 - ct)]$$

위 두 식으로부터 유도하여, 균질의(homogeneous) 반 무한 공간에서는 SH-wave 형태의 표면파가 존재하지 않음을 확인하시오.



5.[8점] $x_2 \geq 0$인 반 무한 공간에서 x_1 방향으로 전파하는 Rayleigh표면파의 운동 변위를 변위 퍼텐셜 ϕ, $\psi(=\psi_3)$로써 유도할 수 있다. 변위 u_1, u_2와 변위 퍼텐셜의 관계는 다음과 같다.

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \qquad u_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

(a) x_2방향에 수직인 면에서의 수직응력 σ_2와 전단응력 τ_{21}은 변위 u_1, u_2로써 다음과 같이 표현된다. 이들을 변위 퍼텐셜로써 표현하시오.

$$\sigma_2 = \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2G\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad \tau_{21} = G\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

(b) 변위 퍼텐셜로 표현된 종파와 횡파의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

변수분리법을 사용하여 $\Phi(r)$과 $\Psi(r)$로 표현되는 방정식을 유도하시오. (이때, $p^2 = k^2 - \omega^2/c_L^2$, $q^2 = k^2 - \omega^2/c_T^2$ 이라고 놓음)

(c) 해의 형태를 다음과 같이 나타내어 이로부터 응력 σ_2와 τ_{21}을 표현하시오.

$$\Phi(x_2) = A_1 \exp(-p x_2) + A_2 \exp(+p x_2) \qquad A_2 = 0,\ \ A_1 = A$$

$$\Psi(x_2) = B_1 \exp(-q x_2) + B_2 \exp(+q x_2) \qquad B_2 = 0,\ \ B_1 = B$$

(d) 적절한 경계조건을 적용하여 얻은 연립방정식의 해가 존재할 조건으로부터 다음과 같이 표현되는 특성방정식을 유도하시오.

$$4\,k^2 p\,q - (k^2 + q^2)^2 = 0$$

(끝)