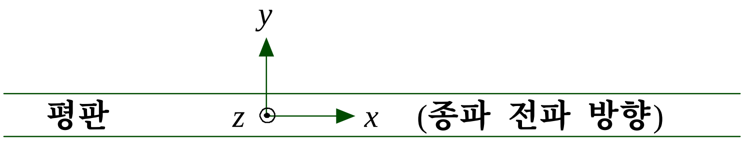
탄성파이론 중간시험 (30점)

숭실대 대학원 기계공학과 2003. 4. 23.

1. 아래 그림에 단면이 보인 바와 같이, xz평면에 놓여 있고 두께가 균일하게 얇은 평판(균질, 등방성, 선형 탄성)에서 x방향으로 전파하는 종파를 고려한다.

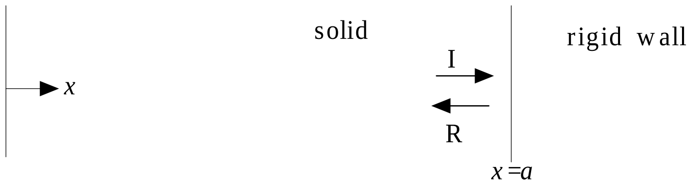


(a) 응력 성분(σ_x, σ_y, σ_z), 변형률 성분(ε_x, ε_y, ε_z), Hooke의 법칙 등을 이 경우에 적합한 형태로 단순화시키고, Newton의 제2법칙에서 유도되는 운동방정식에 적용시켜 파동방정식을 다음과 같이 얻을 때, 전파속도 c_p를 Young률 E, Poisson비 ν, 밀도 ρ를 사용하여 표현하시오.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(b) 위의 파동방정식의 해(solution)을 구하시오.

2. 무한한 공간에서 $+x$ 방향으로 전파하던 1차원 종파 $x=a$인 위치에서 강체 벽면을 만나 반사된다.



(a) $(\sigma_x)_i = f(t - \frac{x}{c_L})$ 의 형태를 갖는 입사 응력파는 반사 후 어떻게 되는 지 유도하고 설명하시오.

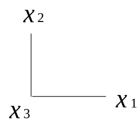
(b) $(u)_i = F(t - \frac{x}{c_L})$ 의 형태를 갖는 입사 변위파는 반사 후 어떻게 되는지 유도하고 설명하시오.

3. **일반적인 동탄성**(dynamic elasticity) **문제는 다음과 같은 식들로 표현될 수 있다**.

stress equation of motion $\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$

stress-strain relation $\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$

strain-displacement relation $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$



(a) x_3 **방향으로 운동하며** x_1-x_2 **면에서 전파하는** antiplane shear wave**의 변위 운동방정식을 유도하시오**.

(b) x_1-x_2 **면에서 운동하며 전파하는** plane strain longitudinal wave**의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다**.

$$G u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + G) u_{\beta,\beta\alpha} = \rho \ddot{u}_\alpha \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

이 식을 xyz **좌표계의 변위** $u(x,y,t)$ **와** $v(x,y,t)$**로 표현되는 운동방정식들로 바꾸어 나타내시오**.

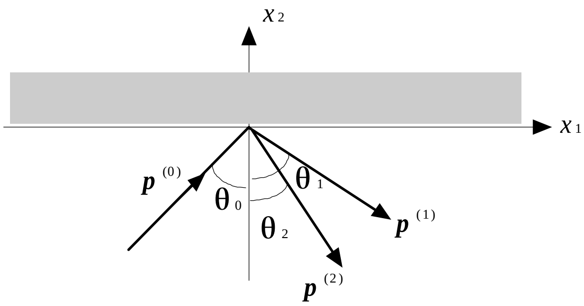
- 끝 -

탄성파이론 학기말시험 (30점)

숭실대 대학원 기계공학과 2003. 6. **.

---

1. (12점) SV파가 $x_2<0$인 반무한 공간에서 전파하다가, $x_2=0$인 경계면에서 반사되고 있다. $x_2>0$인 반무한 공간은 재질이 매우 단단(rigid)하여 강체로 간주되는 경우, $x_2=0$인 경계면은 고정되었다고 볼 수 있다. 이러한 경우에



(a) $x_2=0$인 경계면에 적절한 경계조건을 설정하시오. 입사파의 운동변위는 $\boldsymbol{u}^{(0)} = A_0\ (-\cos\theta_0\ \mathbf{i}_1 + \sin\theta_0\ \mathbf{i}_2)\ \exp[\mathrm{i}\ k_0\ (x_1 \sin\theta_0 + x_2 \cos\theta_0 - c_T\ t)]$ 로 표현할 수 있는데, 이에 대응하는 반사파들의 운동변위 $\boldsymbol{u}^{(1)}$, $\boldsymbol{u}^{(2)}$를 A_1, k_1, θ_1, A_2, k_2, θ_2를 이용하여 표현하시오.

(b) $x_2<0$인 임의 지점에서의 운동변위 $\boldsymbol{u}$는 입사파 운동변위 $\boldsymbol{u}^{(0)}$와 반사파 운동변위 $\boldsymbol{u}^{(1)}$, $\boldsymbol{u}^{(2)}$의 합으로 나타난다. 여기에 경계조건을 적용하여 k_1, θ_1, k_2, θ_2와 k_0, θ_0와의 관계를 각각 구하시오.

(c) 위의 연립방정식에서 $\dfrac{A_1}{A_0}$와 $\dfrac{A_2}{A_0}$를 구하시오.

(d) $\theta_0=0$인 경우라면 반사파는 어떤 결과로 나타날지 (식을 쓰지말고 문장으로) 설명하시오.

2. (12점) 단면이 원형인 막대(밀도 ρ, 전단탄성계수 G)를 따라 축대칭의 비틂파(torsional wave)가 전파하고 있을 때, 운동 변위성분은 원주방향의 변위 $v(r,z,t)$만 남는다. 막대의 원주면은 자유(free)롭다.

(a) 원형 막대 내의 한 요소 주변의 응력들에 의해 원주방향으로 가해지는 힘들의 평형을 고려하여 다음과 같은 응력 운동방정식을 유도하시오.

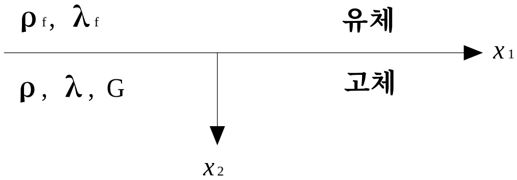
$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

(b) 위의 결과로부터 비틂파의 변위 운동방정식을 유도하고, $v(r,z,t) = R(r)\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]$ 로 변수분리하여, $R(r)$에 대한 미분방정식을 도출하시오.

(c) $k = \omega/c_T$ 일 때, 변위 해와 phase velocity를 구하시오.

(d) $k \neq \omega/c_T$ 일 때, 변위 해와 phase velocity를 구하시오.

3. (16점) **반무한 공간을 차지하는 탄성 고체의 표면을 따라 전파하는** Rayleigh **표면파는 다음 그림과 같이 고체 표면이 유체에 접해 있을 때 파동 운동이 영향을 받는다. 인접 유체는 비점성 압축성이라 할 때, 그 영향을 이해하기 위하여 다음의 질문들에 답하시오.**



(a) **고체에서의** Rayleigh **표면파의 운동을 변위퍼텐셜** $\phi(x_1, x_2, t)$**와** $\psi(x_1, x_2, t)$**를 이용해 두 개의 운동방정식으로 표현하고, 이때 필요한 종파속도** c_L**과 횡파속도** c_T**를** Lame**상수와 밀도로 표현하시오.**

(b) **인접한 유체에서의 파동 운동을 변위퍼텐셜** $\phi_f(x_1, x_2, t)$**를 이용해 한 개의 운동방정식으로 표현하고, 이때 필요한 속도** c_f**를 표현하시오. 이 유체에서는 고체에서와 달리 운동방정식이 한 개이면 충분한데, 그 이유를 설명하시오.**

(c) **변위퍼텐셜들을 변수분리하여**

$$\phi(x_1, x_2, t) = \Phi(x_2)\ \exp[i(kx_1 - \omega t)]$$
$$\psi(x_1, x_2, t) = \Psi(x_2)\ \exp[i(kx_1 - \omega t)]$$
$$\phi_f(x_1, x_2, t) = \Phi_f(x_2)\ \exp[i(kx_1 - \omega t)]$$

로 표현한 후 세 개의 운동방정식을 $\Phi(x_2)$, $\Psi(x_2)$, $\Phi_f(x_2)$**로 표현하시오.**

이때 $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c_L^2} = p^2,\quad k^2 - \dfrac{\omega^2}{c_T^2} = q^2,\quad \dfrac{\omega^2}{c_f^2} - k^2 = s^2$ **라고 놓으시오.**

* **위 운동방정식들의 해의 형태는** $\Phi = A\ \exp(-px_2)$, $\Psi = B\ \exp(-qx_2)$, $\Phi_f = C\ \exp(-isx_2)$ **라고 할 수 있다.**

(d) $x_2=0$**인 경계면에서 만족되어야 할 경계조건을 설정하시오.**

(e) **임의 지점에서의 변위** u_2, u_2^f, **응력** σ_2, σ_2^f, τ_{21} **등을 변위퍼텐셜** ϕ, ψ, ϕ_f**를 이용하여 표현하고,** (*)**에 표현한 해를 대입하여 정리하시오.**

(f) **변위와 응력에 대한** (e)**의 결과를 경계조건에 대입하고 정리하시오.**

(g) **위** (f)**에서 얻은 연립방정식이** 0**이 아닌 해를 갖기 위한 조건을 표현하고, 이 식을 정리하여 다음 식의** ?**에 필요한 표현을 구하시오.**

$$4k^2pq - (k^2 + q^2)^2 = ?$$

(h) **위의 결과에서 얻게 되는** wavenumber k**는 복소수**($k_R + i\ k_I$)**이다. 이 표현의 허수부분의 물리적 의미를 설명하시오.**