기 계 진 동 학 2009년 학기말시험(26점) 문제 2009. 6. 12.

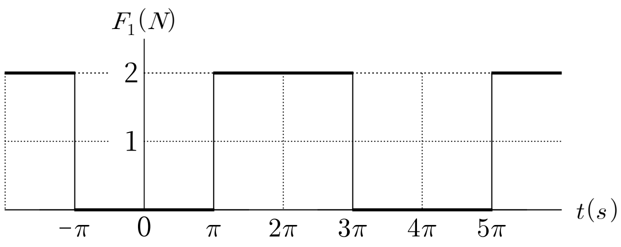
1.[6점] 역학적 진동의 이론 또는 실험에 관한 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( )안에 하라.
(근거 불필요. ㉮, ㉯의 답이 모두 맞아야만 득점)
(a) 부족감쇠계(ζ<1)의 계단함수 가진 응답에서, 오버슛(overshoot)이 작을수록
㉮ 상승시간(rising time)이 길어진다. ( )
㉯ 정착시간(settling time)이 길어진다. ( )

(b) 진동 계측 시스템에서,
㉮ 압전형 진동 가속도 센서는 고유진동수가 낮을수록 사용가능한 진동수 범위가 넓다. ( )
㉯ 신호조정 증폭기(conditioning amplifier)의 출력 신호는 오실로스코프 또는 신호분석기 등의 판독/기록 장치로 입력된다. ( )

(c) 진동 해석 결과를 검증하기 위한 실험에서,
㉮ 고유진동수 등의 고유진동특성을 측정함으로써 해석 모델의 타당성을 파악한다. ( )
㉯ 가진기 또는 충격해머로 가진하며, 힘변환기(force transducer)로 가진력을 측정한다. ( )

2.[4점] 스프링과 댐퍼로 이루어진 충격흡수기(shock absorber)에 질량 20 kg인 강체를 매달고 수직 아랫방향으로 충격을 가하여 진동 변위를 관찰하였다. 첫 번째 극대값이 12.5 mm, 두 번째 극대값이 5.5 mm로 측정되었고, 두 극대값의 시간 간격이 0.5초였다.
(a) 이 충격흡수기의 감쇠비 ζ는 얼마인가?
(b) 이 충격흡수기의 감쇠계수 c는 얼마인가?

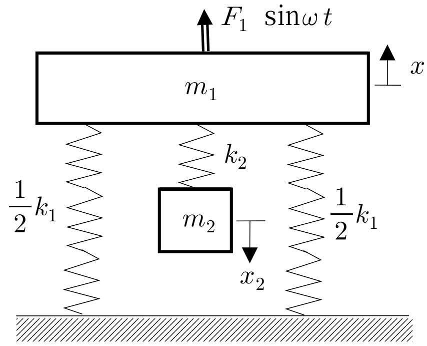
3.[4점] 주기적 가진력을 Fourier급수로 표현한다.
(a) 다음 그림과 같은 주기적 가진력 $F_1(t)$의 Fourier 계수를 구하고, Fourier 급수를 전개한 형태로 처음 3개 항을 표현하라.



(b) 다음과 같이 3개항의 합으로 표현되는 가진력 $F_2(t)$를 그래프에 나타내어라.

$$F_2(t) = \frac{1}{2} + \sin\pi t + \frac{1}{2}\sin 2\pi t$$

4.[4점] Consider the two-degree-of-freedom system with the harmonic force $F_1 \sin\omega t$ on the mass m_1. (a) Draw free-body diagrams. (b,c) Derive the equations of motion. (d) Write the equation in a matrix form.



5.[4점] 질량이 8.0 kg인 강체와 강성이 3200 N/m인 스프링으로 구성된 1자유도 비감쇠계의 강체에 다음과 같은 가진력이 가해진다. 여기서 t_0는 5초, F_0는 20 N이다. 5초 이후의 응답 $x(t)$를 구하라.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & (0 \le t \le t_0) \\ 0 & (t > t_0) \end{cases}$$

6.[4점] 정지해 있던 1자유도 비감쇠계에 충격과 계단함수 하중이 동시에 가해진다. 운동방정식은

$$\ddot{x}(t) + 16\, x(t) = 24\, \delta(t) + 16 \quad (t \ge 0)$$

이고, $\delta(t)$는 Dirac 델타 함수이다. t>0 일 때 응답 $x(t)$를 라플라스(Laplace)변환 방법으로 구하라.
(단위는 고려하지 않음)

--------------- 정 답 ---------------

1. (a) ㉮ O ㉯ X (b) ㉮ X ㉯ O
(c) ㉮ O ㉯ O
2. (a) ζ = 0.130 (b) c = 65.9 kg/s
3. (a) $F_1(t) = 1 - \frac{4}{\pi}\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{3\pi}\cos\frac{3t}{2} - \cdots$
4. (b,c) $m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\, x_1 + k_2\, x_2 = F_0 \sin\omega t$
$m\, \ddot{x}_2 + k_2\, x_1 + k_2\, x_2 = 0$
(d) $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$
5. $x(t)$ = (6.25 mm) {cos20(t-5) - cos20t}
6. $x(t)$ = 1 - cos4t + 6 sin4t (t>0)

1. (a) ㉮ O ㉯ X (b) ㉮ X ㉯ O (c) ㉮ O ㉯ O

2. (a) $\delta = \ln\dfrac{12.5}{5.5} = \ln 2.44 = 0.821$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.821}{\sqrt{4\pi^2 + 0.821^2}} = 0.130$$

(b) $\omega_d = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi\,\mathrm{rad}}{0.5\,s} = 12.57\ \mathrm{rad/s}$, $\omega_n = \dfrac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{12.57\,\mathrm{rad/s}}{\sqrt{1-0.130^2}} = 12.68\ \mathrm{rad/s}$

$\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_n}$ $\Rightarrow$ $c = 2m\omega_n\zeta = 2\ (20\ \mathrm{kg})(12.68\ \mathrm{rad/s})(0.130) = 65.9\ \mathrm{kg/s}$

3. (a) $T = 4\pi$, $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$, $-\pi<t<\pi$에서 $F_1(t) = 0$, $\pi<t<3\pi$에서 $F_1(t) = 2$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F_1(t)\,dt = \frac{2}{4\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(0)\,dt + \int_{\pi}^{3\pi}(2)\,dt\right\} = \frac{2}{4\pi}\{0 + 2(2\pi)\} = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F_1(t)\cos n\omega_T t\,dt = \frac{2}{4\pi}\left\{0 + \int_{\pi}^{3\pi}(2)\cos\frac{nt}{2}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{0 + \frac{4}{n}\left[\sin\frac{nt}{2}\right]_{\pi}^{3\pi}\right\} = \frac{2}{n\pi}\left\{\sin\frac{3n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\{-1-1\} = \frac{-4}{\pi},\quad a_2 = \frac{2}{2\pi}\{0-0\} = 0,\quad a_3 = \frac{2}{3\pi}\{1-(-1)\} = \frac{4}{3\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F_1(t)\sin n\omega_T t\,dt = \frac{2}{4\pi}\left\{0 + \int_{\pi}^{3\pi}(2)\sin\frac{nt}{2}\,dt\right\}$$

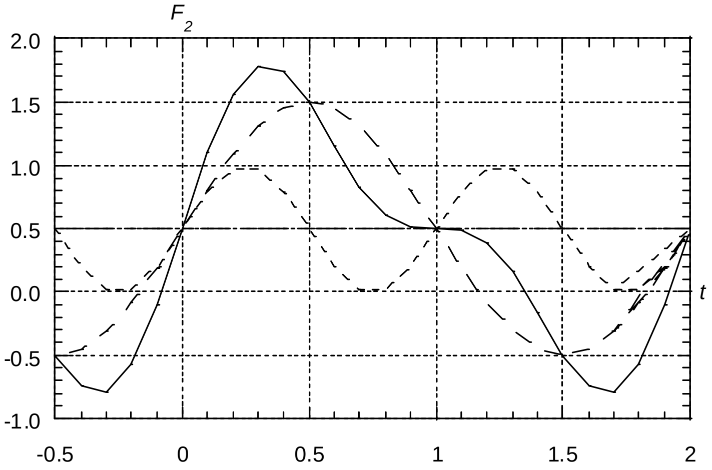
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{0 - \frac{4}{n}\left[\cos\frac{nt}{2}\right]_{\pi}^{3\pi}\right\} = \frac{-2}{n\pi}\left\{\cos\frac{3n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$b_1 = \frac{-2}{\pi}\{0-0\} = 0,\quad b_2 = \frac{-2}{2\pi}\{-1-(-1)\} = 0,\quad b_3 = \frac{-2}{3\pi}\{0-0\} = 0$$

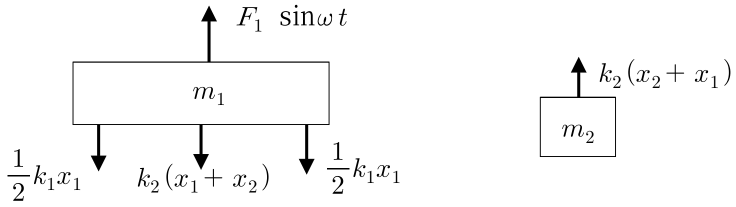
$$F_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi}\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{3\pi}\cos\frac{3t}{2} - \cdots\ \ (\mathrm{N})$$

(b)



4. (a)



(b,c) $m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{1}{2} k_1 x_1 - \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 (x_1 + x_2) + F_1 \sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = F_1 \sin\omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 + x_1) \quad \Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

(d) $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$

5. $m = 8.0$ kg, $k = 3200$ N/m $\Rightarrow$ $\omega_n = \sqrt{\dfrac{3200 \text{ N/m}}{8.0 \text{ kg}}} = 20$ rad/s

$t_0 = 5$ s, $F_0 = 20$ N

(방법 1) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_n} \displaystyle\int_0^{t_0} F_0 \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \dfrac{F_0}{m\omega_n} \left[\dfrac{1}{\omega_n} \cos\omega_n (t-\tau) \right]_0^{t_0}$

$$= \frac{F_0}{k} \{\cos\omega_n (t - t_0) - \cos\omega_n t\} = \frac{20 \text{ N}}{3200 \text{ N/m}} \{\cos 20(t\text{-}5) - \cos 20t\}$$

$$= (0.00625 \text{ m}) \{\cos 20(t\text{-}5) - \cos 20t\} = (6.25 \text{ mm}) \{\cos 20(t\text{-}5) - \cos 20t\}$$

(방법 2) $F(\tau) = F_0 \quad (0 < \tau < t_0)$

$$F(t-\tau) = F_0 \quad 0 < t-\tau < t_0 \Rightarrow -t < -\tau < t_0 - t \Rightarrow t > \tau > t - t_0$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_{t-t_0}^{t} F_0 \sin\omega_n \tau\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n} \left[\frac{-1}{\omega_n} \cos\omega_n \tau \right]_{t-t_0}^{t}$$

$$= \frac{F_0}{k} \{\cos\omega_n (t - t_0) - \cos\omega_n t\} = \cdots = (6.25 \text{ mm}) \{\cos 20(t\text{-}5) - \cos 20t\}$$

(방법 3) $x_1(t) = \dfrac{1}{m\omega_n} \displaystyle\int_0^{t} F_0 \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \dfrac{F_0}{m\omega_n} \left[\dfrac{1}{\omega_n} \cos\omega_n (t-\tau) \right]_0^{t} = \dfrac{F_0}{k}(1 - \cos\omega_n t)$

$$x_2(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_{t_0}^{t} (-F_0) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{-F_0}{m\omega_n} \left[\frac{1}{\omega_n} \cos\omega_n (t-\tau) \right]_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{-F_0}{k} \{1 - \cos\omega_n (t - t_0)\}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega_n t) + \frac{-F_0}{k} \{1 - \cos\omega_n (t - t_0)\}$$

$$= \frac{F_0}{k} \{\cos\omega_n (t - t_0) - \cos\omega_n t\} = \cdots = (6.25 \text{ mm}) \{\cos 20(t\text{-}5) - \cos 20t\}$$

6. $\ddot{x}(t) + 16\,x(t) = 24\,\delta(t) + 16 \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad [s^2 + 16]\; X(s) = 24 + \frac{16}{s}$$

$$X(s) = \frac{24}{s^2+4^2} + \frac{16}{s(s^2+4^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs}{s^2+4^2} + \frac{C}{s^2+4^2}$$

$$24\,s + 16 = A(s^2+4^2) + Bs^2 + Cs$$

$$\Rightarrow \quad A+B = 0, \quad C = 24, \quad 16\,A = 16 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4^2} + \frac{24}{s^2+4^2}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{1}{s}] - L^{-1}[\frac{s}{s^2+4^2}] + 6\,L^{-1}[\frac{4}{s^2+4^2}]$$

$$= 1 - \cos 4t + 6\,\sin 4t \qquad (t>0)$$