기 계 진 동 학 2009년 시험2 (27점) 문제 2009. 5. 12.

1.[3점] 1940년에 Tacoma Narrows Bridge가 붕괴된 과정을 3단계 이상으로 구분하여 각 단계의 역학적 현상들을 서술하라.

2.[4점] 조화가진 응답에 관한 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( )안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 기타 줄의 조율이 덜 되어 기준 음의 진동수 보다 2% 높은 진동수의 소리를 내고 있을 때, 기준 음을 내는 소리굽쇠 소리를 동시에 발생시켰더니 0.2초 주기의 맥놀이(beat) 현상이 나타났다면, 줄의 장력을 약간 느슨하게 하여 기준 음의 진동수 보다 1% 높은 진동수의 소리를 내도록 하면 맥놀이 주기는 0.2초 보다 더 길어진다. ( )
판단 근거 :

(b) 고속 프레스와 같은 고속 회전기계에서, 고유진동수가 회전진동수보다 훨씬 작도록 설계하면 진동을 어느 정도 저감시킬 수 있는데, 이 때 진폭이 0에 가까워지지는 않으며 감쇠계수 값을 크게 하더라도 진동 저감효과는 미약하다. ( )
판단 근거 :

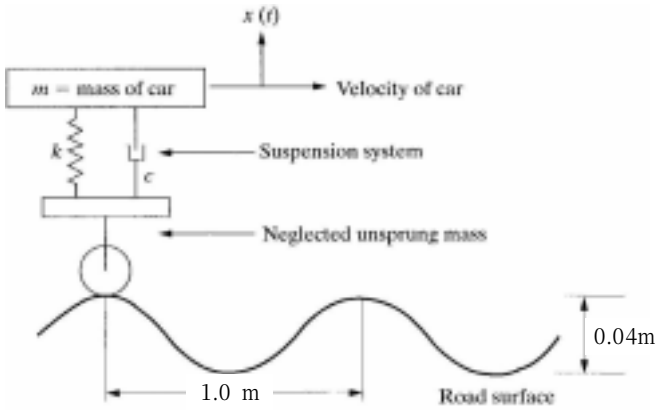
3.[4점] The response of an underdamped 1-DOF system excited by a harmonic cosine force is

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\phi) + X\cos(\omega t-\theta)$$

(a) For the system of mass m = 20 kg, spring stiffness k = 30,000 N/m, damping coefficient c = 600 kg/s, calculate the steady state amplitude X and phase θ if the harmonic force is 800 N at 12 Hz.

(b) For the system of damping ratio ζ = 0.25, undamped natural frequency ω_n = 40 rad/s, driving frequency ω = 10 rad/s, steady-state amplitude X = 0.004 m, and phase θ = 0.133 rad, calculate the amplitude A and phase ϕ of the response if the system was initially at rest.

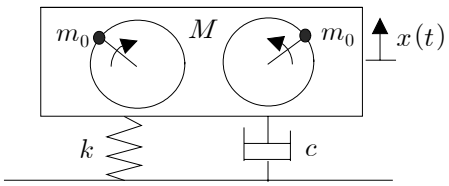
4.[6점] 1자유도계로 단순화 될 수 있는 2륜차(가령 segway)가 그림과 같이 sine함수 형태의 요철 도로 위를 15 km/h의 속력으로 지나고 있다. 타이어의 상하운동 변위를 $y(t) = Y\sin\omega_b t$ 로 표현한다.



(a) 타이어의 상하운동 진동수 f를 Hz단위로 구하고, Y값과 ω_b값을 각각 구하라.

(b) 이륜차의 고유진동수 ω_n은 16.5 rad/s이고, 감쇠비 ζ는 0.150임을 알 때, 차체의 진폭 X_b를 구하라.

5.[6점] 그림과 같이 전체 질량이 M인 물체 내에서 편심 질량이 각각 m_0인 두 회전체가 회전 반지름 e로서 1분에 N바퀴씩 회전하고 있다. 회전 불균형에 따른 수직방향 진동을 해석한다.



(a) 질량 M인 물체 주변에 작용하는 외력을 나타내는 자유물체도(free-body diagram)을 그리고, 운동방정식을 유도하라. (최종 결과는 문제에 주어진 기호만 사용하여 표현함)

(b) 회전수 N이 1200 rpm이고, 전체 질량 M이 10 kg이며, 편심 질량 m_0가 0.2 kg이고, 회전 반지름 e는 0.05 m이다. 스프링의 강성 k가 15,000 N/m이고, 댐퍼의 감쇠계수 c가 300 kg/s이다. 물체의 변위 진폭은 몇 mm인가?

6.[4점] 질량 10 kg, 감쇠비 ζ가 0.20, 비감쇠 고유진동수 ω_n이 8.0 rad/s인 시스템이 정지해 있다가, t = 0일 때 초기속도 $\dot{x}(0)$ = 20 mm/s에 의해 자유진동을 하는 중에 t = 5 s 일 때 충격량 1.0 N·s인 충격이 x 방향으로 가해졌다.

(a) $0 < t < 5$ s 동안의 응답 $x(t)$를 구하라.

(b) $t > 5$ s 일 때의 응답 $x(t)$를 구하라.

기 계 진 동 학 2009년 시험2 해답

1. <1단계> 바람에 의해 와류(vortex) 발생
<2단계> 와류가 구동진동수 ω로 다리를 가진
<3단계> 다리의 고유진동수(ω_n)와 와류 구동진동수(ω)가 일치하여($\omega_n=\omega$) 공진 발생
<4단계> 다리의 진동이 점점 커지면서 붕괴

2. (a) O $\quad T_1 = \dfrac{2\pi}{|\omega_1-\omega_0|} = \dfrac{2\pi}{|1.02\,\omega_0-\omega_0|} = \dfrac{2\pi}{0.02\,\omega_0} = 0.2$ s

$T_2 = \dfrac{2\pi}{|\omega_2-\omega_0|} = \dfrac{2\pi}{|1.01\,\omega_0-\omega_0|} = \dfrac{2\pi}{0.01\,\omega_0} = 2\dfrac{2\pi}{0.02\,\omega_0} = 2\ (0.2\ \text{s})$

(b) O (회전불균형 정규화 진폭 그래프)

3. (a) $m = 20$ kg, $k = 30{,}000$ N/m, $c = 600$ kg/s, $F_0 = 800$ N, $f = 12$ Hz

$\omega = (2\ \pi\ \text{rad})\ (12\ \text{Hz}) = 75.4$ rad/s

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{30{,}000\ \text{N/m}}{20\ \text{kg}}} = 38.7$ rad/s, $\quad \zeta = \dfrac{600\ \text{kg/s}}{2\sqrt{(20\ \text{kg})(30{,}000\ \text{N/m})}} = 0.387$

$r = \dfrac{75.4}{38.7} = 1.95$

$f_0 = \dfrac{800\ \text{N}}{20\ \text{kg}} = 40\ \text{m/s}^2$

$X = \dfrac{40}{\sqrt{(38.7^2-75.4^2)^2+[2(0.387)(38.7)(75.4)]^2}} = 0.00841\ (\text{m}) = 8.41\ \text{mm}$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{2(0.387)(38.7)(75.4)}{38.7^2-75.4^2} = \tan^{-1}(-0.539)$ $\quad (\ \theta>0\ )$

$= -0.495 + \pi = 2.65$ rad $(= 151°)$

(b) $\zeta = 0.25$, $\omega_n = 40$ rad/s, $\omega = 10$ rad/s, $\quad X = 0.004$ m, $\theta = 0.133$ rad

$\omega_d = \sqrt{1-(0.25)^2}\,(40\ \text{rad/s}) = 38.7$ rad/s

$\zeta\,\omega_n = (0.25)(40\ \text{rad/s}) = 10$ rad/s

$x(t) = A\ e^{-10t}\ \sin(38.7\ t\ +\phi) + (0.004\ \text{m})\ \cos(10\ t\ -\ 0.133)$

$\dot{x}(t) = -10\ A\ e^{-10t}\ \sin(38.7\ t\ +\phi) + 38.7\ A\ e^{-10t}\ \cos(38.7\ t\ +\phi)$
$\quad -\ (0.04\ \text{m/s})\ \sin(10\ t\ -\ 0.133)$

$x(0) = A\ \sin\phi + (0.004\ \text{m})\ \cos 0.133 = 0$
$\quad \Rightarrow \quad A\ \sin\phi = -\ 0.00396\ \text{m} < 0 \qquad \cdots ①$

$\dot{x}(0) = -10\ A\ \sin\phi + 38.7\ A\ \cos\phi + (0.04\ \text{m/s})\ \sin 0.133 = 0$
$\quad \Rightarrow \quad A\ \cos\phi = [(10)(-0.00396) - 0.00530]/38.7 = -0.0449/38.7$
$= -0.00116\ (\text{m}) < 0 \qquad \cdots ②$

$A = \sqrt{(-0.00396)^2+(-0.00116)^2} = 0.00413\ (\text{m}) = 4.13\ \text{mm}$

$\phi = \tan^{-1}\dfrac{-0.00396}{-0.00116} = \tan^{-1}(3.41)$ $\quad$ (①과 ②에 따르면 ϕ는 3사분면의 각도)

$= 1.29 + \pi$ rad $= 4.43$ rad $(= 254°)$

4. (a) $Y = \frac{1}{2}(0.04\ \text{m}) = 0.02\ \text{m}$

$$f = (15\ \text{km/h})\left(\frac{1\ \text{cycle}}{0.001\ \text{km}}\right)\left(\frac{1\ \text{hour}}{3600\ \text{s}}\right) = 4.17\ \text{Hz}$$

$$\omega_b = (4.17\ \text{Hz})\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{cycle}}\right) = 26.2\ \text{rad/s}$$

(b) $r = \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{26.2\ \text{rad/s}}{16.5\ \text{rad/s}} = 1.588, \qquad \zeta = 0.150$

$$X_b = Y\frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = (0.02\ \text{m})\frac{\sqrt{1+[2(0.15)(1.588)]^2}}{\sqrt{[1-(1.588)^2]^2+[2(0.15)(1.588)]^2}}$$

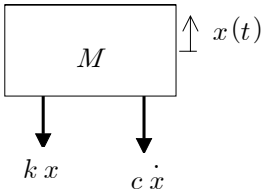
$$= (0.02\ \text{m})\ (0.695) = 0.0139\ \text{m} = 13.9\ \text{mm}$$

5. (a) $-kx - c\dot{x} = (M-2m_0)\ddot{x} + 2m_0\frac{d^2}{dt^2}(x + e\sin\omega_r t)$

$$= M\ddot{x} - 2m_0\ddot{x} + 2m_0\ddot{x} - 2m_0 e\,\omega_r^2\sin\omega_r t$$

$$\Rightarrow\ M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 2m_0 e\,\omega_r^2\sin\omega_r t$$

$$\Rightarrow\ M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 2m_0 e\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2\sin\frac{2\pi N}{60}t$$



(b) $\omega_r = (2\ \pi\ \text{rad})\ (1{,}200\ \text{1/min})\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ s}\right) = 125.7\ \text{rad/s}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{15{,}000\ \text{N/m}}{10\ \text{kg}}} = 38.7\ \text{rad/s}, \qquad r = \frac{\omega_r}{\omega_n} = \frac{125.7}{38.7} = 3.25$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Mk}} = \frac{300\ \text{kg/s}}{2\sqrt{(10\ \text{kg})(15{,}000\ \text{N/m})}} = 0.387$$

$$X_r = \frac{2\,m_0 e}{M}\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$= \frac{2(0.2\ \text{kg})(0.05\ \text{m})}{10\ \text{kg}}\ \frac{(3.25)^2}{\sqrt{(1-3.25^2)^2+[2(0.387)(3.25)]^2}}$$

$$= (0.002\ \text{m})\ (1.068) = 0.00214\ \text{m} = 2.14\ \text{mm}$$

6. (a) $m = 10\ \text{kg},\ \zeta = 0.20,\ \omega_n = 8.0\ \text{rad/s},\ \dot{x}(0) = v_0 = 20\ \text{mm/s}$

$\zeta\omega_n = (0.20)(8.0\ \text{rad/s}) = 1.6\ \text{rad/s},\ \omega_d = (8.0\ \text{rad/s})\sqrt{1-0.20^2} = 7.84\ \text{rad/s}$

$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi) \qquad x(0) = A\sin\phi = 0 \quad \cdots ①$

$\dot{x}(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ [-\zeta\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)]$

$\dot{x}(0) = A\ (-\zeta\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi) = v_0$

$$\Rightarrow\ A\cos\phi = \frac{v_0}{\omega_d} = \frac{20\ \text{mm/s}}{7.84\ \text{rad/s}} = 2.55\ \text{mm} > 0 \quad \cdots ②$$

①,② $\Rightarrow\ \phi = 0,\quad A = 2.55\ \text{mm},\quad \Rightarrow\quad x(t) = 2.55\ e^{-1.6t}\ \sin(7.84\ t)\ \text{mm}$

(b) $\frac{\hat{F}}{m\omega_d} = \frac{1.0\ \text{N}\cdot\text{s}}{(10\ \text{kg})(7.84\ \text{rad/s})} = 0.01276\ \text{m} = 12.76\ \text{mm}$

$$x_2(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau) = (12.76\ \text{mm})\ e^{-1.6(t-5)}\sin 7.84(t-5)$$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$= 2.55\ e^{-1.6t}\ \sin(7.84\ t) + 12.76\ e^{-1.6(t-5)}\sin 7.84(t-5) \quad \text{mm}$$