

가반

1.[6점] 함수 $f(t)$ 의 Laplace변환 $F(s)$ 를 구하라.

(a) $f(t) = \sinh 2t$

(b) $f(t) = \cos(2t-6) \quad (t \geq 3)$

(c) $f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^{3\tau} d\tau$

2.[4점] 다음 함수의 Laplace 역변환을 구하라.

(a) $F(s) = \frac{s-3}{s^2+4}$

(b) $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$

3.[4점] 부분분수에 관한 다음 물음에 답하라.

(a) 다음 함수 $X(s)$ 를 부분분수로 분해하라.

$$X(s) = \frac{-6}{s(s-2)(s+1)}$$

(b) 다음과 같이 부분분수로 표현된 $Y(s)$ 를 Laplace 역변환하여 $y(t)$ 를 구하라.

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{3}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)}$$

4.[6점] 다음 초기값 문제의 해 $x(t)$ 를 Laplace 변환 방법으로 구하라.

$$x'' + 3x' - 4x = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2$$

5.[4점] Bessel함수의 미분 공식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(\lambda x)] = \lambda x^\nu J_{\nu-1}(\lambda x) \quad \dots \textcircled{a}$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(\lambda x)] = -\lambda x^{-\nu} J_{\nu+1}(\lambda x) \quad \dots \textcircled{b}$$

$$2 \frac{d}{dx} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad \dots \textcircled{c}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(\lambda x)] = \lambda J_{\nu-1}(\lambda x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) \quad \dots \textcircled{d}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(\lambda x)] = -\lambda J_{\nu+1}(\lambda x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) \quad \dots \textcircled{e}$$

(a) 위의 공식을 이용하여 다음 미분을 구하라.

$$\frac{d}{dx} [J_2(4x)] =$$

(b) 위의 공식을 이용하여 다음 적분을 구하라.

$$\int J_6(x) dx =$$

나반

1.[6점] 함수 $f(t)$ 의 Laplace변환 $F(s)$ 를 구하라.

(a) $f(t) = \cosh 3t$

(b) $f(t) = \sin(2t-8) \quad (t \geq 4)$

(c) $f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^{-2\tau} d\tau$

2.[4점] 다음 함수의 Laplace 역변환을 구하라.

(a) $F(s) = \frac{s-2}{s^2+16}$

(b) $G(s) = \frac{e^{-3s}}{s}$

3.[4점] 부분분수에 관한 다음 물음에 답하라.

(a) 다음 함수 $X(s)$ 를 부분분수로 분해하라.

$$X(s) = \frac{-4s-5}{s(s-1)(s+2)}$$

(b) 부분분수로 표현된 $Y(s)$ 를 Laplace 역변환하여 $y(t)$ 를 구하라.

$$Y(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{2}{(s+3)^3} + \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{4}{(s+3)}$$

4.[6점] 다음 초기값 문제의 해 $x(t)$ 를 Laplace 변환 방법으로 구하라.

$$x'' - 2x' - 3x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -1$$

5.[4점] Bessel함수의 미분 공식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(\lambda x)] = \lambda x^\nu J_{\nu-1}(\lambda x) \quad \dots \textcircled{a}$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(\lambda x)] = -\lambda x^{-\nu} J_{\nu+1}(\lambda x) \quad \dots \textcircled{b}$$

$$2 \frac{d}{dx} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad \dots \textcircled{c}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(\lambda x)] = \lambda J_{\nu-1}(\lambda x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) \quad \dots \textcircled{d}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(\lambda x)] = -\lambda J_{\nu+1}(\lambda x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) \quad \dots \textcircled{e}$$

(a) 위 공식을 이용하여 다음 미분을 구하라.

$$\frac{d}{dx} [J_3(2x)] =$$

(b) 위 공식을 이용하여 다음 적분을 구하라.

$$\int J_6(x) dx =$$

가반

1.[4점] 구간 $[-1, 1]$ 에서 다음 두 함수가 있다.

$$f(x) = 5x^3 - 3x, \quad g(x) = 2x$$

- (a) 두 함수가 직교하는지 조사하라.
 (b) 함수 $f(x)$ 의 정규(norm)를 구하라.

2.[2점] 다음 방정식을 되팔림(self-adjoint)꼴로 변환하라.

$$x y'' + (1-x) y' + 2 y = 0$$

3.[6점] 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 정의된 주기(periodic) Sturm-Liouville 문제가 다음과 같이 주어져 있다.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (\lambda \text{는 실수로서, } \lambda \geq 0)$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

- (a) 이 문제의 고유값과 고유함수를 구하라.
 (b) 완비된 직교함수 집합이 $y_0 = 1, y_n = \cos nx$ 와 $\sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$)일 때, 이 함수들을 직교전개 공식 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n$ 에 적용하여 급수 형태로 $f(x)$ 를 표현하라.

Fourier급수 공식

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

4.[4점] 주기가 2π 인 함수 $f(x)$ 의 한 주기 구간 $[-\pi, \pi]$ 이 다음과 같이 주어져 있다. 주기함수 $f(x)$ 를 Fourier급수 형태로 표현하고자 할 때, 계수들 중에서 $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ 를 구하라.

$$f(x) = -4 \quad (-\pi < x < 0), \quad f(x) = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

5.[4점] 주기가 4인 함수 $f(x)$ 의 한 주기 구간 $[0, 4]$ 이 다음과 같이 주어져 있다. 주기함수 $f(x)$ 를 Fourier급수 형태로 표현하라. (상수항부터 4개 항을 표현할 것)

$$f(x) = 2x \quad (0 < x < 2), \quad f(x) = 0 \quad (2 < x < 4)$$

나반

1.[4점] 구간 $[-1, 1]$ 에서 다음 두 함수가 있다.

$$f(x) = 1 - 3x^2, \quad g(x) = 2x$$

- (a) 두 함수가 직교하는지 조사하라.
 (b) 함수 $f(x)$ 의 정규(norm)를 구하라.

2.[2점] 다음 방정식을 되팔림(self-adjoint)꼴로 변환하라.

$$x y'' - 2x^2 y' + 2xy = 0$$

3.[6점] 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 정의된 주기(periodic) Sturm-Liouville 문제가 다음과 같이 주어져 있다.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (\lambda \text{는 실수로서, } \lambda \geq 0)$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

- (a) 이 문제의 고유값과 고유함수를 구하라.
 (b) 완비된 직교함수 집합이 $y_0 = 1, y_n = \cos nx$ 와 $\sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$)일 때, 이 함수들을 직교전개 공식 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n$ 에 적용하여 급수 형태로 $f(x)$ 를 표현하라.

Fourier급수 공식

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

4.[4점] 주기가 2π 인 함수 $f(x)$ 의 한 주기 구간 $[-\pi, \pi]$ 이 다음과 같이 주어져 있다. 주기함수 $f(x)$ 를 Fourier급수 형태로 표현하고자 할 때, 계수들 중에서 $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ 를 구하라.

$$f(x) = 0 \quad (-\pi < x < 0), \quad f(x) = 4 \quad (0 < x < \pi)$$

5.[4점] 주기가 4인 함수 $f(x)$ 의 한 주기 구간 $[0, 4]$ 이 다음과 같이 주어져 있다. 주기함수 $f(x)$ 를 Fourier급수 형태로 표현하라. (상수항부터 4개 항을 표현할 것)

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad (0 < x < 2), \quad f(x) = 0 \quad (2 < x < 4)$$

== 정 답 ==

시험#3 가반

- (a) $F(s) = \frac{2}{s^2 - 4}$
(b) $F(s) = e^{-3s} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$
(c) $F(s) = \frac{1}{s^2(s-3)}$
- (a) $f(t) = \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t$
(b) $g(t) = H(t-2)$
- (a) $X(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s+1}$
(b) $y(t) = 2e^{3t} + (\frac{3}{2}t^2 - t + 2)e^{-2t}$
- $x(t) = -\frac{2}{5}e^t - \frac{3}{5}e^{-4t}$
- (a) $4J_1(4x) - \frac{2}{x}J_2(4x)$
또는 $-4J_3(4x) + \frac{2}{x}J_2(4x)$
또는 $2J_1(4x) - 2J_3(4x)$
(b) $-2J_5(x) - 2J_3(x) - 2J_1(x) + \int J_0(x)dx$

시험#3 나반

- (a) $F(s) = \frac{s}{s^2 - 9}$
(b) $F(s) = e^{-4s} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$
(c) $F(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$
- (a) $f(t) = \cos 4t - \frac{1}{2} \sin 4t$
(b) $g(t) = H(t-3)$
- (a) $X(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$
(b) $y(t) = 3e^{2t} + (-t^2 + t - 4)e^{-3t}$
- $x(t) = \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}$
- (a) $2J_2(2x) - \frac{3}{x}J_3(2x)$
또는 $-2J_4(2x) + \frac{3}{x}J_3(2x)$
또는 $J_2(2x) - J_4(2x)$
(b) $-2J_5(x) - 2J_3(x) - 2J_1(x) + \int J_0(x)dx$

학기말시험 가반

- (a) 직교
(b) $\|f\| = \sqrt{\frac{8}{7}}$
- $(xe^{-x}y')' + 2e^{-x}y = 0$
- (a) 고유값 $0, 1, 4, 9, \dots$
고유함수 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$
(b) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
 $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$
 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$
- $a_0 = -4$ (또는 -2), $a_1 = 0$, $a_2 = 0$,
 $b_1 = \frac{8}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{8}{3\pi}$
- $f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{2}{\pi} \sin \pi x$
 $+ \dots$

학기말시험 나반

- (a) 직교
(b) $\|f\| = \sqrt{\frac{8}{5}}$
- $(e^{-x^2}y')' + 2e^{-x^2}y = 0$
- (a) 고유값 $0, 1, 4, 9, \dots$
고유함수 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$
(b) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
 $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$
 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$
- $a_0 = 4$ (또는 2), $a_1 = 0$, $a_2 = 0$,
 $b_1 = \frac{8}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{8}{3\pi}$
- $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x$
 $+ \dots$