시험 #3 (20점) 2002. 11. 20.

1.[4점] 다음 Bessel방정식의 해를 급수해법으로 구하라. 단, $y(0)$는 유한하다.

$$x^2\, y'' + x\, y' + x^2\, y = 0$$

2.[2점] Bessel함수의 미분 공식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}[J_\nu(\lambda x)] = \lambda J_{\nu-1}(\lambda x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) \quad \cdots ⓐ$$

$$\frac{d}{dx}[J_\nu(\lambda x)] = -\lambda J_{\nu+1}(\lambda x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) \quad \cdots ⓑ$$

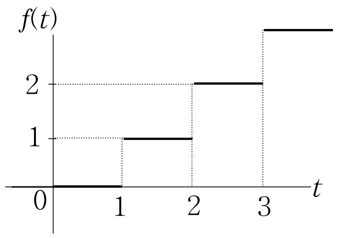
위의 공식을 이용하여 다음 적분을 구하라.

$$\int J_5(x)\, dx$$

3.[4점] 다음 함수 $f(t)$의 Laplace 변환 $F(s)$를 구하라.

(a) $f(t) = e^{3t}\sin 2t$

(b) 그림과 같은 무한계단 함수 $f(t)$



4.[6점] Laplace 영역에서 함수 $X(s)$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s-3)}$$

(a) 합성곱(convolution)을 이용하여 $X(s)$의 Laplace 역변환 $x(t)$를 구하라.

(b) $X(s)$를 부분분수로 분해하라.

Laplalce 변환에 활용될 수 있는 공식

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad L\{\frac{t^n}{n!}\} = \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

5.[4점] 다음 초기값 문제의 해 $y(t)$를 Laplace 변환 방법으로 구하라.

$$y'' + 16\, y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

학기말시험 (30점) 2002. 12. 11.

1.[4점] 구간 $[-\pi,\pi]$에서 다음 두 함수가 있다.

$$f(x) = x\ , \qquad g(x) = 2\sin x$$

(a) 두 함수가 직교하는지 조사하라.

(b) 함수 $g(x)$의 정규(norm)를 구하라.

2.[4점] Sturm-Liouville 방정식, 즉 고유방정식은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$[p(x)\, y'(x)]' + [q(x) + \Lambda\, w(x)]\, y(x) = 0$$

단, 구간 $0 \le x \le 1$에서 $p(x)>0$, $w(x)>0$.

다음 방정식들을 Sturm-Liouville 방정식과 대응시킬 때 $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$, Λ는 각각 어떤 형태인가?

(a) Bessel 방정식

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

(b) Legendre 방정식

$$(1-x^2)\, y'' - 2x y' + \mu(\mu+1)\, y = 0$$

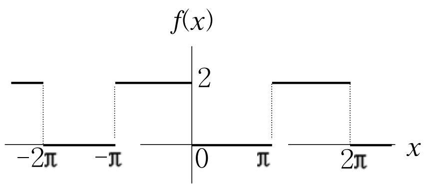
3.[8점] Sturm-Liouville 문제가 다음과 같이 주어져 있다. 단 Λ는 양의 실수.

$$y'' + \Lambda\, y = 0, \quad y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$$

(a) 이 문제의 고유값과 고유함수를 구하라.

(b) 답이 타당하게 구해졌는지 검증하기 위해, (a)의 결과로부터 고유함수들이 서로 직교하는지 확인하라.

4.[7점] 그래프에서 보여주고 있는 함수를 Fourier급수 형태로 표현하라.



5.[7점] 다음 2계 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y'' + 4\, y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$