8.9 자이로스코프의 운동. 오일러 각 [motion of a gyroscope. Eulerian angles] (p. 1199)

자이로스코프[gyroscope]

≡ 기하학적인 축에 대하여 자유롭게 회전할 수 있는 회전자[rotor] + 균형원[gimbals]

질량중심은 공간 속의 한 곳에 고정되어 있음.

오일러 각[Eulerian angles] 좌표계 OXYZ

1. 세차[precession]운동 : Z축에 대한 회전 ϕ → Ox′yZ ⇒ 세차율 $\dot{\phi}$
2. 장동[nutation]운동 : y축에 대한 회전 θ → Oxyz ⇒ 장동율 $\dot{\theta}$
3. 스핀[spin]운동 : z축에 대한 회전 ψ ⇒ 스핀율 $\dot{\psi}$

그림 8.15(b) 그림 8.16

회전자의 운동

각속도

고정축 Z방향의 단위벡터 $\mathbf{K} = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{k}$

$$\omega = \dot{\phi}\ \mathbf{K} + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + \dot{\psi}\ \mathbf{k} = \dot{\phi}\ (-\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{k}) + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + \dot{\psi}\ \mathbf{k}$$
$$= -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$$

각운동량

I' : 횡축에 대한 회전자의 관성모멘트 I : 스핀축에 대한 회전자의 관성모멘트

$$\mathbf{H}_O = \bar{I}_x\ \omega_x\ \mathbf{i} + \bar{I}_y\ \omega_y\ \mathbf{j} + \bar{I}_z\ \omega_z\ \mathbf{k} = I'(-\dot{\phi}\ \sin\theta)\ \mathbf{i} + I'\ \dot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$$
$$= -I'\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + I'\ \dot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$$

자이로스코프의 운동

내부 균형원[gimbal] (회전좌표계) $\dot{\psi} = 0$

$$\Omega = -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + \dot{\phi}\ \cos\theta\ \mathbf{k}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \Omega\times\mathbf{H}_O$$
$$= \frac{d}{dt}[-I'\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + I'\ \dot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}]$$
$$+ [-\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + \dot{\phi}\ \cos\theta\ \mathbf{k}]\times[-I'\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + I'\ \dot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}]$$
$$= [-I'(\ddot{\phi}\ \sin\theta + \dot{\phi}\,\dot{\theta}\ \cos\theta)\ \mathbf{i} + I'\ \ddot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}]$$
$$+ [I\ \dot{\theta}\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta) - I'\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \cos\theta]\ \mathbf{i}$$
$$+ [I\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta) - I'\dot{\phi}^2\ \sin\theta\cos\theta\ ]\ \mathbf{j}$$
$$+ [I'\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \sin\theta - I'\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \sin\theta]\ \mathbf{k}$$
$$= [-I'(\ddot{\phi}\ \sin\theta + 2\ \dot{\phi}\,\dot{\theta}\ \cos\theta) + I\ \dot{\theta}\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)]\ \mathbf{i}$$
$$+ [I'\ (\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\ \sin\theta\cos\theta) + I\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)]\ \mathbf{j}$$
$$+ I\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$$

$$\Sigma M_x = -I'(\ddot{\phi}\ \sin\theta + 2\ \dot{\phi}\,\dot{\theta}\ \cos\theta) + I\ \dot{\theta}\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)$$
$$\Sigma M_y = I'\ (\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\ \sin\theta\cos\theta) + I\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)$$
$$\Sigma M_z = I\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)$$

비선형방정식

특별한 경우 → 8.10절

8.10 자이로스코프의 정상세차운동 [steady precession of a gyroscope] (p. 1201)

장동각 θ, 세차율 $\dot{\phi}$, 스핀율 $\dot{\psi}$가 일정할 때 ($\dot{\theta}$ = 0)

<u>회전자의 운동</u>

각속도

8.9절 $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k} = -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \omega_z\ \mathbf{k}$

각운동량

8.9절 $\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + I'\ \dot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$

$\Rightarrow\ \mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k} = -I'\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + I\ \omega_z\ \mathbf{k}$

<u>자이로스코프의 운동</u>

내부 균형원[gimbal] (회전좌표계) $\dot{\psi} = 0$

8.9절 $\Omega = -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\ \mathbf{j} + \dot{\phi}\ \cos\theta\ \mathbf{k}$

$\Rightarrow\ \Omega = -\dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{i} + \dot{\phi}\ \cos\theta\ \mathbf{k}$

8.9절 $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} = -I'(\ddot{\phi}\ \sin\theta + \dot{\phi}\,\dot{\theta}\ \cos\theta)\ \mathbf{i} + I'\ \ddot{\theta}\ \mathbf{j} + I\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\ \mathbf{k}$

$\Rightarrow\ (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} = 0$

8.9절 $\Omega\times\mathbf{H}_O = [I\ \dot{\theta}\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta) - I'\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \cos\theta]\ \mathbf{i}$
$+ [I\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta) - I'\dot{\phi}^2\ \sin\theta\cos\theta\ ]\ \mathbf{j}$
$+ [I'\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \sin\theta - I'\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \sin\theta]\ \mathbf{k}$

$\Rightarrow\ \Omega\times\mathbf{H}_O = [I\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta) - I'\dot{\phi}^2\ \sin\theta\cos\theta\ ]\ \mathbf{j}$
$= [I\ (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta) - I'\dot{\phi}\ \cos\theta\ ]\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{j}$
$= (I\ \omega_z - I'\dot{\phi}\ \cos\theta)\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{j}$

$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \Omega\times\mathbf{H}_O$
$= (I\ \omega_z - I'\dot{\phi}\ \cos\theta)\ \dot{\phi}\ \sin\theta\ \mathbf{j}$

우력모멘트 방향 = $\mathbf{j}$방향, 즉 세차축(Z축)과 스핀축(z축)에 수직방향

$\Rightarrow\ \dot{\phi} \neq 0$

가령, θ = 90°일 때 $\Sigma\mathbf{M}_O = I\ \dot{\psi}\ \dot{\phi}\ \ \mathbf{j}$

스핀($\dot{\psi}$)축(z축)과 수직인 축(y축)에 대한 우력모멘트 $\mathbf{M}_O$를 가하면, $\dot{\phi}$ 발생 $\Rightarrow$ 세차운동

8.11 무부하 축대칭 물체의 운동 [motion of an axisymmetrical body under no force] (p. 1202)

(생 략)