8.5 강체의 3차원 운동 (motion of a rigid body in 3-D) (p. 1181)

$\Sigma\mathbf{F} = m\ \mathbf{a}_G$ $\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$

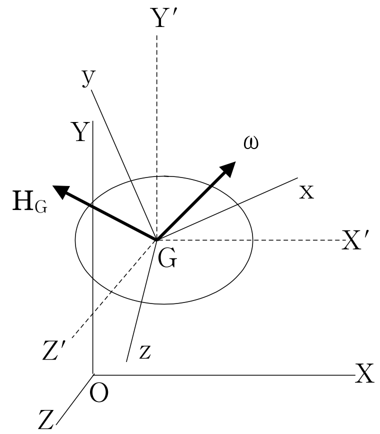
$\dot{\mathbf{H}}_G \neq I_G\ \alpha$ $\dot{\mathbf{H}}_G$을 계산하는 효과적이고 편리한 방법 필요

$\mathbf{H}_G$: 병진(또는 고정)좌표계 GX′Y′Z′에 대한 각운동량

물체의 회전 ⇒ 중심질량관성모멘트($\bar{I}_{X'}$, $\bar{I}_{Y'}$, $\bar{I}_{Z'}$)와

중심질량관성곱($\bar{I}_{Y'Z'}$, $\bar{I}_{Z'X'}$, $\bar{I}_{X'Y'}$, ⋯)은

시시각각 변화 : 불편



물체와 함께 회전하는 좌표계에 대한

중심질량관성모멘트와 중심질량관성곱은 일정 !

즉, $(\mathbf{H}_G)_{Gxyz}$를 이용하는 표현이 편리

5.10절 → $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \Omega\times\mathbf{Q}$

$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \Omega\times\mathbf{H}_G$

Ω : 좌표계 Gxyz의 회전 각속도

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} = \dot{H}_x\ \mathbf{i} + \dot{H}_y\ \mathbf{j} + \dot{H}_z\ \mathbf{k}$: 회전좌표계 Gxyz에 대한 $\mathbf{H}_G$의 변화율

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \Omega\times\mathbf{H}_G}$$

(i) 회전좌표계 Gxyz가 물체(각속도 ω)에 붙어있는 경우, Ω = ω

예제 8.3 회전하는 수직축에 부착된 막대 (p. 1186)

(ii) 물체와 무관하게 회전하는 좌표계를 사용하는 것이 유리한 경우, Ω ≠ ω

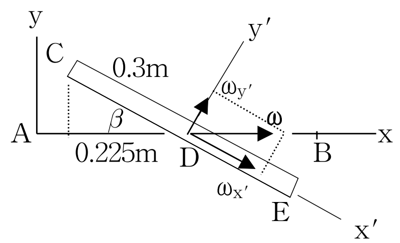
예. 축대칭 물체 : 물체의 중심질량관성모멘트와 중심질량관성곱이 일정하므로

물체 자체보다 덜 회전하는 좌표계 설정 가능.

예제 8.2 (p. 1171) 또는 예제 8.5 (p. 1188)

예. (연습 8.55) 연습문제 8.1에서 어셈블리의 각운동량 $\mathbf{H}_D$의 변화율 $\dot{\mathbf{H}}_D$를 구하라. (p. 1191)

(연습 8.1) 질량이 1.5 kg이고 길이가 600 mm인 균일한 막대 AB와 CE가 각각의 중점에서 용접되어 있다. 이 어셈블리가 일정한 각속도 ω = 12 rad/s로 회전하고 있을 때, D에 관한 각운동량 $\mathbf{H}_D$의 크기와 방향을 구하라.



관성주축 Dx′y′z $\beta = 41.4°$

$\omega = \omega(\cos\beta\ \mathbf{i}' + \sin\beta\ \mathbf{j}')$

$I_{x'} = 0,$ $I_{y'} = I_{z'} = \frac{1}{12}mL^2$

$H_{x'} = I_{x'}\ \omega_{x'} = 0,$ $H_{z'} = I_{z'}\ \omega_{z'} = 0,$

$\mathbf{H}_D = H_{y'}\ \mathbf{j}' = I_{y'}\ \omega_{y'}\ \mathbf{j}' = \frac{1}{12}mL^2\ \omega\ \sin\beta\ \mathbf{j}'$

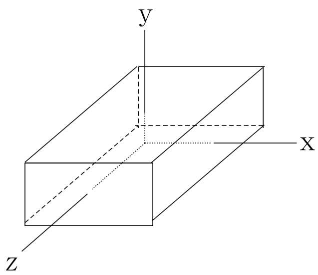
$\dot{\mathbf{H}}_D = (\dot{\mathbf{H}}_D)_{Gxyz} + \Omega\times\mathbf{H}_D$ $(\dot{\mathbf{H}}_D)_{Gxyz} = 0$, $\Omega = \omega$

$= 0 + \omega(\cos\beta\mathbf{i}'+\sin\beta\mathbf{j}')\times\frac{1}{12}mL^2\omega\ \sin\beta\mathbf{j}' = \frac{1}{12}mL^2\omega^2\sin\beta\ \cos\beta\ \mathbf{k} = \frac{1}{24}mL^2\omega^2\sin2\beta\ \mathbf{k}$

$= \frac{1}{24}(1.5\text{kg})(0.6\text{m})^2(12\text{rad/s})^2\sin82.8°\mathbf{k} = 3.21\ \text{N}\cdot\text{m}\ \mathbf{k}$

8.6 오일러의 운동방정식. 강체의 3차원 운동에 대한 달랑베르법칙 확장 (p. 1182)

[Euler's eqs. of motion. Extension of d'Alembert's principle to the motion of a rigid body in 3-D]



x,y,z축을 물체의 관성주축과 일치하게 설정

$H_x = \bar{I}_x\ \omega_x,\quad H_y = \bar{I}_y\ \omega_y,\quad H_z = \bar{I}_z\ \omega_z$

$\bar{I}_x,\ \bar{I}_y,\ \bar{I}_z$: 주중심관성모멘트

$\mathbf{H}_G = H_x\ \mathbf{i} + H_y\ \mathbf{j} + H_z\ \mathbf{k}$

$= \bar{I}_x\ \omega_x\ \mathbf{i} + \bar{I}_y\ \omega_y\ \mathbf{j} + \bar{I}_z\ \omega_z\ \mathbf{k}$

$\Omega = \omega = \omega_x\ \mathbf{i} + \omega_y\ \mathbf{j} + \omega_z\ \mathbf{k}$

$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \Omega\times\mathbf{H}_G$$

$$\Sigma(M_x\ \mathbf{i} + M_y\ \mathbf{j} + M_z\ \mathbf{k}) = (\bar{I}_x\ \dot{\omega}_x\ \mathbf{i} + \bar{I}_y\ \dot{\omega}_y\ \mathbf{j} + \bar{I}_z\ \dot{\omega}_z\ \mathbf{k})$$
$$+ (\omega_x\ \mathbf{i} + \omega_y\ \mathbf{j} + \omega_z\ \mathbf{k})\times(\bar{I}_x\ \omega_x\ \mathbf{i} + \bar{I}_y\ \omega_y\ \mathbf{j} + \bar{I}_z\ \omega_z\ \mathbf{k})$$
$$= [\bar{I}_x\ \dot{\omega}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}_z)\omega_y\omega_z]\ \mathbf{i} + [\bar{I}_y\ \dot{\omega}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}_x)\omega_z\omega_x]\ \mathbf{j}$$
$$+ [\bar{I}_z\ \dot{\omega}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y)\omega_x\omega_y]\ \mathbf{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma M_x &= \bar{I}_x\ \dot{\omega}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}_z)\omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= \bar{I}_y\ \dot{\omega}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}_x)\omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= \bar{I}_z\ \dot{\omega}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y)\omega_x\omega_y \end{aligned}\right]$$

: *오일러의 운동방정식*

질량중심에 대한 강체의 운동 해석에 사용

8.5절의 식이 더 일반적이고 간결.

$\Sigma F_x = m\ \bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\ \bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\ \bar{a}_z$

달랑베르 법칙 (6.4절의 확장)

강체에 작용하는 외력들

= 강체 내 여러질점의 유효력

= 질량중심 G에 작용하는 벡터 $m\ \mathbf{a}_G$와 우력모멘트 $\dot{\mathbf{H}}_G$ ($\neq \mathrm{I}_G\ \alpha$)

8.7 고정점에 대한 강체의 운동 [motion of a rigid body about a fixed point] (p. 1183)

$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ $\Sigma \mathbf{M}_O$: 강체에 작용하는 힘들의 O에 대한 모멘트의 합

$\dot{\mathbf{H}}_O$: 고정점 O에 대한 각운동량의 변화율

고정좌표계 OXYZ

회전좌표계 Oxyz 좌표계 회전 각속도 Ω

$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \Omega \times \mathbf{H}_O$

$\mathbf{H}_O$: 고정좌표계 OXYZ에 대한 물체의 각운동량

$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$: 회전좌표계 Oxyz에 대한 각운동량의 변화율 ←8.2절

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \Omega \times \mathbf{H}_O}$$

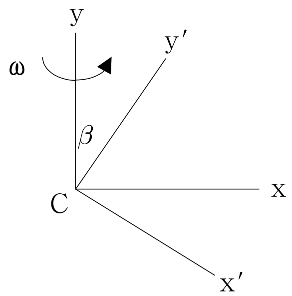
(i) 회전좌표계 Oxyz가 물체(각속도 ω)에 붙어있는 경우, $\Omega = \omega$

(ii) 물체와 무관하게 회전하는 좌표계를 사용하는 것이 유리한 경우, $\Omega \neq \omega$

예제 8.5 원판의 회전과 축의 선회 (p. 1188)

예.(연습 8.85 유사) (p. 1195)

120 mm 반경의 균일한 반원판이 수직축 주위로 ω의 일정한 각속도로 회전하고 있는 clevis(U자형 고리)에 A와 B에서 힌지(hinge)되어 있다. (a) ω=15 rad/s일 때 판이 x축과 이루는 각도 β, (b) 판이 수직(β=90°)을 유지하기 위한 ω의 최대값을 구하라.



$r = 0.12$ m

수직축에 맞춘 회전좌표계 Cxyz

반원판에 맞춘 회전좌표계 Cx′y′z

대칭성 ⇒ $I_{x'y'} = I_{y'z} = I_{zx'} = 0$

$I_{x'} = \frac{1}{4} m r^2, \quad I_{y'} = \frac{1}{2} m r^2, \quad I_{z'} = ?$

$\omega_{x'} = -\omega \sin\beta, \ \omega_{y'} = \omega \cos\beta, \ \omega_z = 0$

$\mathbf{H}_C = I_{x'} \omega_{x'} \mathbf{i}' + I_{y'} \omega_{y'} \mathbf{j}' + I_z \omega_z \mathbf{k}$

$= \frac{1}{4} m r^2 (-\omega \sin\beta)\ \mathbf{i}' + \frac{1}{2} m r^2 (\omega \cos\beta)\ \mathbf{j}'$

$= \frac{1}{4} m r^2 \omega (-\sin\beta\ \mathbf{i}' + 2 \cos\beta\ \mathbf{j}')$

$\Omega = \omega\ \mathbf{j} = -\omega \sin\beta\ \mathbf{i}' + \omega \cos\beta\ \mathbf{j}'$

$(\dot{\mathbf{H}}_C)_{Cx'y'z} = 0$

$\Sigma \mathbf{M}_C = -m\ g\ x_G' \cos\beta\ \mathbf{k} = -m\ g\ \dfrac{4r}{3\pi} \cos\beta\ \mathbf{k}$

$\Sigma \mathbf{M}_C = (\dot{\mathbf{H}}_C)_{Cx'y'z} + \Omega \times \mathbf{H}_C$

$-m\ g\ \dfrac{4r}{3\pi} \cos\beta\ \mathbf{k} = 0 + (-\omega \sin\beta\ \mathbf{i}' + \omega \cos\beta\ \mathbf{j}') \times \frac{1}{4} m r^2 \omega (-\sin\beta\ \mathbf{i}' + 2 \cos\beta\ \mathbf{j}')$

$= -\frac{1}{4} m r^2 \omega^2 \sin\beta \cos\beta\ \mathbf{k}$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 \sin\beta = \frac{16g}{3\pi r} = \frac{16(9.81\ \mathrm{m/s^2})}{3\pi(0.12\ \mathrm{m})} = 138.8\ /\mathrm{s}^2$$

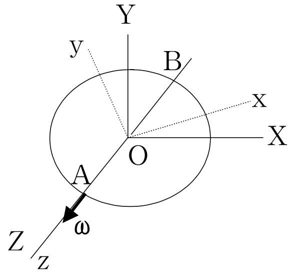
(a) $\beta = \sin^{-1} \dfrac{(138.8)}{\omega^2} = \sin^{-1} \dfrac{(138.8)}{(15^2)} = 38.1°$

(b) sin90°=1, $\omega = \sqrt{138.8} = 11.8$ (rad/s)

8.8 **고정축에 대한 강체의 회전** [rotation of a rigid body about a fixed axis] (p. 1184)

고정축 AB를 중심으로 회전하는 강체의 운동

AB를 z축으로하는 회전좌표계 Oxyz



물체의 회전 각속도 $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$

$(\omega_x = 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z = \omega)$

$$H_{Ox} = I_x\ \omega_x - I_{xy}\ \omega_y - I_{xz}\ \omega_z \quad \Rightarrow \quad H_x = -I_{xz}\ \omega$$
$$H_{Oy} = -I_{xy}\ \omega_x + I_y\ \omega_y - I_{yz}\ \omega_z \quad \Rightarrow \quad H_y = -I_{yz}\ \omega$$
$$H_{Oz} = -I_{xz}\ \omega_x - I_{yz}\ \omega_y + I_z\ \omega_z \quad \Rightarrow \quad H_z = I_z\ \omega$$

좌표계 Oxyz의 각속도 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O$$
$$= (-I_{xz}\ \mathbf{i} - I_{yz}\ \mathbf{j} + I_z\ \mathbf{k})\dot{\omega} + \omega\mathbf{k} \times (-I_{xz}\ \mathbf{i} - I_{yz}\ \mathbf{j} + I_z\ \mathbf{k})\omega$$
$$= (-I_{xz}\ \mathbf{i} - I_{yz}\ \mathbf{j} + I_z\ \mathbf{k})\alpha + (-I_{xz}\ \mathbf{j} + I_{yz}\ \mathbf{i})\omega^2$$

$$\boxed{\Sigma M_x = -I_{xz}\ \alpha + I_{yz}\ \omega^2 \qquad \Sigma M_y = -I_{yz}\ \alpha - I_{xz}\ \omega^2 \qquad \Sigma M_z = I_z\ \alpha}$$

물체에 가해진 힘들 $\Rightarrow$ ΣM_z $\Rightarrow$ 각가속도 α =(적분)$\Rightarrow$ 각속도 ω

$\alpha,\ \omega$ $\Rightarrow$ ΣM_x , ΣM_y

$\Sigma F_x = m\ \bar{a}_x \quad \Sigma F_y = m\ \bar{a}_y \quad \Sigma F_z = m\ \bar{a}_z$ $\Rightarrow$ 베어링에서의 반력

(i) 회전체가 xy평면에 대하여 대칭인 경우

관성곱 $I_{xz} = 0,\ I_{yz} = 0$

$\Sigma M_x = 0,\ \ \Sigma M_y = 0,\ \ \Sigma M_z = I_z\ \alpha$: 강체의 평면운동

(ii) 회전체가 xy평면에 대하여 대칭이 아니고, 일정한 각속도 ω로 회전하는 경우 $(\alpha = 0)$

$\Sigma M_x = I_{yz}\ \omega^2, \qquad \Sigma M_y = I_{xz}\ \omega^2, \qquad \Sigma M_z = 0$

예. 회전하는 크랭크축의 균형[balance] (p. 1185)

축이 정지해 있을 때 (그림 8.14a)

정적 균형[static balance] : 정적 반력 A = 축의 무게 W

축이 일정한 각속도 ω로 회전할 때 (그림 8.14b)

원점 G, 회전축 AB방향이 z축, 축의 대칭면에 y축, $I_{xz} = 0,\ \ I_{yz} > 0$

$$\Sigma M_x = I_{yz}\ \omega^2 \quad \Rightarrow \quad A_y\ \frac{l}{2} + B\ \frac{l}{2} = I_{yz}\ \omega^2 \qquad \cdots ①$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - B = 0 \qquad \cdots ②$$

①,② $\Rightarrow A_y = B = \dfrac{I_{yz}\omega^2}{l} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_y = \dfrac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{i},\ \ \mathbf{B} = -\dfrac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j}$: 동적 반력

동적 반력은 축과 함께 회전하여 구조물에 진동 야기

동적 균형(dynamic balance) : 동적 반력이 0이 되도록 하는 작업 또는 그런 상황

축 주위의 질량분포를 재배열하거나 교정질량을 부가하여 I_{yz}=0 이 되도록 함

예제 8.4 돌출 막대가 부착되어 있는 축 (p. 1187)

연습 8. 57, 64, 85