제8장 강체의 3차원 운동역학 [Kinetics of Rigid Bodies in Three Dimensions]

면대칭 강체의 (2차원)평면운동(Ch.6)	vs.	비대칭 강체의 (3차원)공간운동(Ch.8)
$\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_G$ (유효력)	⇒	$\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_G$
$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ (우력모멘트)	⇒	$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$
각운동량 $\mathbf{H}_G = \mathrm{I}_G\,\boldsymbol{\omega}$	⇒	$\mathbf{H}_G = ?$: (8.2절)

8.2 강체의 3차원 각운동량 [angular momentum of a rigid body in three dimensions]

<u>질량중심 G에 대한 물체의 각운동량</u>

4.5절→ $\mathbf{H}_G = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i\,\triangle m_i)$, $\quad \mathbf{H}_G' = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'\,\triangle m_i)$, $\quad \mathbf{H}_G = \mathbf{H}_G'$

$\mathbf{H}_G = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'\,\triangle m_i)$

$\mathbf{H}_G = H_x\,\mathbf{i} + H_y\,\mathbf{j} + H_z\,\mathbf{k}$

$H_x = \mathbf{i}\cdot\mathbf{H}_G = \Sigma[\mathbf{i}\cdot(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'\,\triangle m_i)] = \Sigma[(\mathbf{i}\times\mathbf{r}_i')\cdot\mathbf{v}_i'\,\triangle m_i)]$ (벡터의 3중곱)

$\mathbf{r}_i' = x_i\,\mathbf{i} + y_i\,\mathbf{j} + z_i\,\mathbf{k}$

$\mathbf{i}\times\mathbf{r}_i' = y_i\,\mathbf{k} - z_i\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i' = (\omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k})\times(x_i\,\mathbf{i} + y_i\,\mathbf{j} + z_i\,\mathbf{k})$

$= (\omega_y z_i - \omega_z y_i)\,\mathbf{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)\,\mathbf{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)\,\mathbf{k}$

$(\mathbf{i}\times\mathbf{r}_i')\cdot\mathbf{v}_i'$

$= (y_i\,\mathbf{k} - z_i\,\mathbf{j})\cdot[(\omega_y z_i-\omega_z y_i)\mathbf{i} + (\omega_z x_i-\omega_x z_i)\mathbf{j} + (\omega_x y_i-\omega_y x_i)\mathbf{k}]$

$= y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)$

$= \omega_x(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i$

$= \omega_x\,\Sigma(y_i^2 + z_i^2)\triangle m_i - \omega_y\,\Sigma x_i y_i\triangle m_i - \omega_z\,\Sigma x_i z_i\triangle m_i$

질점계(유한개의 질점) Σ ⇒ 강체(무한개의 질점) $\int$

$H_x = \omega_x \int(y^2 + z^2)dm - \omega_y \int x\,y\,dm - \omega_z \int x\,z\,dm$

$H_y = -\omega_x \int y\,x\,dm + \omega_y \int(z^2 + x^2)dm - \omega_z \int y\,z\,dm$

$H_z = -\omega_x \int z\,x\,dm - \omega_y \int z\,y\,dm + \omega_z \int(x^2 + y^2)\,dm$

중심질량관성모멘트 [centroidal mass moments of inertia]

$\bar{I}_x = \int(y^2+z^2)dm$, $\quad \bar{I}_y = \int(z^2+x^2)dm$, $\quad \bar{I}_z = \int(x^2+y^2)dm$

중심질량관성곱 [centroidal mass products of inertia]

$\bar{I}_{yz} = \int y\,z\,dm$, $\quad \bar{I}_{zx} = \int z\,x\,dm$, $\quad \bar{I}_{xy} = \int x\,y\,dm$

$$H_x = \bar{I}_x\,\omega_x - \bar{I}_{xy}\,\omega_y - \bar{I}_{xz}\,\omega_z$$
$$H_y = -\bar{I}_{xy}\,\omega_x + \bar{I}_y\,\omega_y - \bar{I}_{yz}\,\omega_z$$
$$H_z = -\bar{I}_{xz}\,\omega_x - \bar{I}_{yz}\,\omega_y + \bar{I}_z\,\omega_z$$

관성주축 [principal axes of inertia] : 관성곱이 모두 0이 되는 좌표축 Gx′y′z′

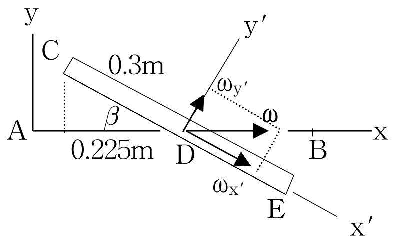
$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\,\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\,\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\,\omega_{z'}$$

$\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$: 주중심관성모멘트 [principal centroidal moments of inertia]

(A) 일반적으로, 두 벡터 $\mathbf{H}_G$와 $\boldsymbol{\omega}$는 서로 다른 방향

예.(연습 8.3) (p. 1174)

질량이 1.5 kg이고 길이가 600 mm인 균일한 막대 AB와 CE가 각각의 중점에서 용접되어 있다. 이 어셈블리가 일정한 각속도 ω = 12 rad/s로 회전하고 있을 때, D에 관한 각운동량 $\mathbf{H}_D$의 크기와 방향을 구하라.



관성주축 Dx′y′z $\qquad \beta = \cos^{-1}\dfrac{225}{300} = 41.4°$

$\omega_{x'} = \omega\cos\beta, \quad \omega_{y'} = \omega\sin\beta, \quad \omega_{z'} = 0$

$\bar{I}_{x'} = 0, \qquad \bar{I}_{y'} = \dfrac{1}{12}mL^2, \qquad \bar{I}_{z'} = \dfrac{1}{12}mL^2$

$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\,\omega_{x'} = 0, \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\,\omega_{z'} = 0,$

$H_{y'} = \bar{I}_{y'}\,\omega_{y'} = \dfrac{1}{12}mL^2\,\omega\sin\beta = \dfrac{1}{12}(1.5\text{kg})(0.6\text{m})^2\,(12\text{rad/s})\sin 41.4° = 0.357\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

$H_D = 0.357\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ ;\ \Theta_x = 48.6°,\ \Theta_y = 41.4°,\ \Theta_z = 90°$

(B) 특별한 경우, 두 벡터 $\mathbf{H}_G$와 $\boldsymbol{\omega}$는 동일한 방향

(i) $\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = \bar{I}_{z'}\ (= \bar{I}')$ 일 때

$\mathbf{H}_G = H_{x'}\,\mathbf{i}' + H_{y'}\,\mathbf{j}' + H_{z'}\,\mathbf{k}' = \bar{I}'(\omega_{x'}\,\mathbf{i}' + \omega_{y'}\,\mathbf{j}' + \omega_{z'}\,\mathbf{k}') = \bar{I}'\,\boldsymbol{\omega}$

예. 구, 정육면체

(ii) $\omega_{x'} = 0$ 이고 $\omega_{y'} = 0$ 일 때

$\boldsymbol{\omega} = \omega_{z'}\,\mathbf{k}'$ (관성주축의 방향과 일치)

$H_{x'} = 0\ ,\quad H_{y'} = 0\ ,\qquad \mathbf{H}_G = H_{z'}\,\mathbf{k}' = \bar{I}_{z'}\,\omega_{z'}\,\mathbf{k}' = \bar{I}_{z'}\,\boldsymbol{\omega}$

예. 기준평면에 대칭인 강체(2차원 강체)의 평면운동(2차원 운동)

<u>고정점 O에 대한 물체의 각운동량</u>

$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_G \times m\,\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G \qquad \leftarrow$ 4.5절

고정좌표계 OXYZ에 대한 질량관성모멘트 I_x, I_y, I_z 와

질량관성곱 I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} 로부터 직접 결정

$\mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i\,\Delta m_i) \qquad \leftarrow \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$

…

$H_{Ox} = I_x\,\omega_x - I_{xy}\,\omega_y - I_{xz}\,\omega_z$

$H_{Oy} = -I_{xy}\,\omega_x + I_y\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_z$

$H_{Oz} = -I_{xz}\,\omega_x - I_{yz}\,\omega_y + I_z\,\omega_z$

예제 8.2 수평면 위의 원판과 축의 회전 (p. 1171)

8.3 강체의 3차원 운동에 대한 충격량과 운동량 법칙의 응용 (p. 1167)

[application of the principle of impulse and momentum to the 3-D motion of a rigid body]

초기운동량 + 충격량 = 최종운동량

예제 8.1 사각 평판의 충격 후 질량중심의 속도, 각운동량과 각속도 (p. 1170)

8.4 3차원에서의 강체의 운동에너지 [kinetic energy of a rigid body in 3-D] (p. 1168)

(생 략)

연습 8. 6, 10