제6장 강체의 평면운동 : 힘과 가속도

[Plane Motion of Rigid Bodies : Forces and Accelerations]

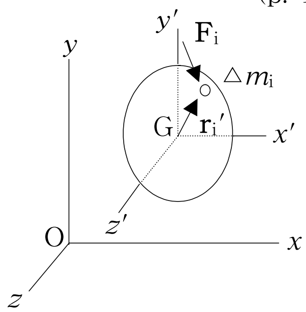
강체의 운동역학 [kinetics of rigid bodies]

⇒ 강체 (질량, 형상) ⇒

강체를 상당히 많은 질점들로 이루어진 계로 취급. 제7장

평판의 평면운동에 국한 (제8장

6.2 강체에 대한 운동방정식 [equations of motion for a rigid body] (p. 1043)



질점계에 대한 결과

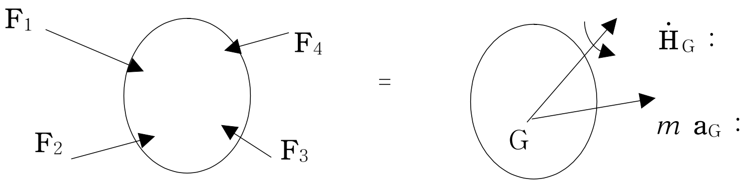
(4.4절) $\Sigma\mathbf{F}_i = m\,\mathbf{a}_G$ $\quad$ $\mathbf{F}_i$: 외력

(A) $\quad$ m : 강체의 질량

$\mathbf{a}_G$: 질량중심 G의

(4.5절) $\Sigma(\mathbf{M}_G)_i = \dot{\mathbf{H}}_G$ $\quad$ $(\mathbf{M}_G)_i = \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i$

(B1) $\quad$ $\dot{\mathbf{H}}_G$: G에 관한 각운동량 $\mathbf{H}_G$의



회전운동이 없을 때 $\quad \Sigma(\mathbf{M}_G)_i = 0 \quad$ (

$\Sigma(\mathbf{M}_C)_i = \mathbf{r}\times(m\,\mathbf{a}_G) \quad$ (

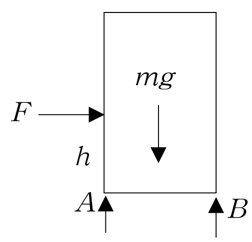
예제 6.1 트럭 바퀴의 마찰력과 수직 반력 (p. 1049)

예제 6.2 병진운동 하는 평판의 가속도와 외력 (p. 1050)

예.(연습6.7) (p. 1057)

20 kg의 장이 바닥에서 자유롭게(μ=0) 움직이도록 하는 캐스터(caster)에 올려져 있다. 그림과 같이 100 N의 힘이 작용할 때, (a) 장의 가속도, (b) 장이 쓰러지지 않을 h 값의 범위를 구하라.

m = 20 kg, $\quad F$ = 100 N, $\quad x_G$ = 0.3 m, $\quad y_G$ = 0.9 m



(a) $\Sigma\mathbf{F}_i = m\,\mathbf{a}_G$; →방향;

$$\Rightarrow \quad a = \quad = \frac{100\ \mathrm{N}}{20\ \mathrm{kg}} = 5\ \mathrm{m/s^2}, \qquad \mathbf{a} = 5\ \mathrm{m/s^2}\rightarrow$$

(b) B를 중심으로 회전하려 할 때

$\Sigma(\mathbf{M}_B)_i = \mathbf{r}\times(m\,\mathbf{a}_G)$; ↺방향;

$$\Rightarrow \quad h = \frac{m(y_G a + x_G g)}{F} = \frac{(20\,\mathrm{kg})[(0.9\,\mathrm{m})(5\,\mathrm{m/s^2}) + (0.3\,\mathrm{m})(9.81\,\mathrm{m/s^2})]}{(100\,\mathrm{N})} = 1.49\ \mathrm{m}$$

A를 중심으로 회전하려 할 때

$\Sigma(\mathbf{M}_A)_i = \mathbf{r}\times(m\,\mathbf{a}_G)$; ↻방향;

$$\Rightarrow \quad h = \frac{m(y_G a - x_G g)}{F} = \frac{(20\,\mathrm{kg})[(0.9\,\mathrm{m})(5\,\mathrm{m/s^2}) - (0.3\,\mathrm{m})(9.81\,\mathrm{m/s^2})]}{(100\,\mathrm{N})} = 0.31\ \mathrm{m}$$

6.3 평면운동에서 강체의 각운동량 [angular momentum of a rigid body in plane motion] (p. 1044)

평면운동하는 강체 평판

질량 $\triangle m_i$인 n개의 질점 P_i로 구성

질량중심 G에 관한 각운동량

$$H_G = \sum_{i=1}^{n} [r_i' \times (v_i \triangle m_i)] \qquad (4.5절) \rightarrow H_G = H_G'$$

$$H_G' = \sum_{i=1}^{n} [r_i' \times (v_i' \triangle m_i)] \; v_i' = \omega \times r_i'$$

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_G' = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i' \times (\omega \times \mathbf{r}_i') \triangle m_i] = \sum_{i=1}^{n} \triangle m_i \, r_i^2 \, \omega \mathbf{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} \triangle m_i \, r_i^2 \right) \omega \mathbf{k} = I_G \, \omega \mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}_G = I_G \, \omega \mathbf{k} \; (= I_G \, \omega) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{H}}_G = I_G \, \dot{\omega} \mathbf{k} = I_G \, \alpha \mathbf{k} \; (= I_G \, \alpha) \qquad \dot{\mathbf{H}}_G = I_G \, \boldsymbol{\alpha} \qquad (B2)$$

주의 : xy평면에 대칭인 물체의 .

I_G : 질량관성모멘트(moment of inertia of masses) 부록B.

$I_G = \int r^2 dm$ 그림 B.9 (p.1317)

회전반경(radius of gyration) k : $I_G = k^2 m$

예. 원판(반지름 r) $I_G = \frac{1}{2} m r^2$ ($k=$) 구(반지름 r) $I_G = \frac{2}{5} m r^2$ ($k=$)

예.(연습 6.22) (p. 1059)

부하와 동력을 끊을 때 전기모터의 회전자는 각속도가 3600 rpm이다. 질량이 60 kg이고 회전반경이 225 mm인 회전자는 돌다가 멈춘다. 미끄럼 마찰력으로 인해 3.5 N·m의 우력이 회전자에 가해지고 있다. 회전자는 멈추기까지 몇 바퀴 회전하겠는가?

ω_0 = 3600 rev/min × 1min/60s = 60 rev/s, ΣM_G =

m = 60 kg, k = 0.225 m $\Rightarrow$ I_G = = $(0.225 \text{ m})^2 (60 \text{ kg})$ = 3.0375 kg·m^2

$$\Sigma M_G = I_G \, \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \qquad = \frac{(-3.5 \text{ N} \cdot \text{m})}{(3.0375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)} = -1.152 \text{ rad/s}^2 \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = -0.1833 \text{ rev/s}^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \qquad = \frac{0 - (60 \text{ rev/s})^2}{2(-0.183 \text{ rev/s}^2)} = 9815 \text{ revolutions}$$

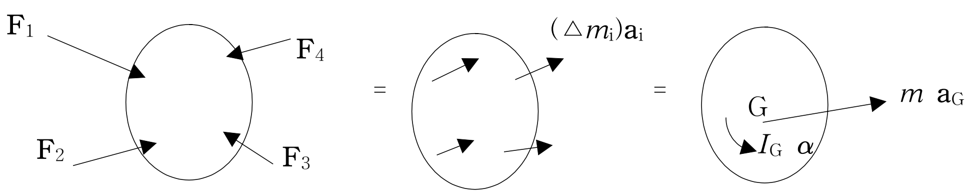
6.4 강체의 평면운동. D'Alembert의 법칙 (p. 1045)

[plane motion of a rigid body. D'Alembert's principle]

(A) $\Sigma \mathbf{F} = m \, \mathbf{a}_G$ (B1,2) $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G = I_G \, \boldsymbol{\alpha}$

xy평면에서 ΣF_x = ΣF_y = ΣM_G =

평판에 작용하는 외력의 합력 $\Sigma F_x, \Sigma F_y$ 〃 〃 〃 합모멘트 ΣM_G	⇒	질량중심 G의 가속도 〃 각가속도	적분 ====⇒	어떤 순간 t의 질량중심의 좌표 평판의 회전각



강체에 작용하는 외력들 = 강체 내 여러질점의 유효력 = 질량중심G에 작용하는 유효력 $m \, a_G$와 우력모멘트 $I_G \, \alpha$

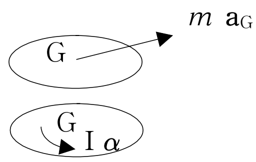
;

(i) 병진운동 $\alpha = 0 \Rightarrow \Sigma M_G = 0, \quad \Sigma \mathbf{F} =$

(ii) 질량중심에 대한 회전운동 (예. 연습 6.22)

$\mathbf{a}_G = 0 \Rightarrow \Sigma \mathbf{F}=0, \quad \Sigma \mathbf{M}_G =$

(iii) 일반적인 평면운동 =



예제 6.4 줄이 당기는 원판에서 원판의 각가속도와 줄의 가속도 (p. 1052)

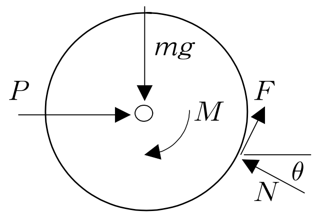
예제 6.5 구르는 구의 속도와 각속도 및 미끄러짐 (p. 1053)

예.(연습 6.23) (p. 1059)

질량이 10 kg인 균일 원판이 경사면과 접촉하게 놓여있고, 그림과 같이 일정한 11.0 N·m의 우력 M이 작용한다. 링크 AB의 무게는 무시할 만하다. D에서 운동마찰계수가 0.4임을 알 때, (a) 원판의 각가속도, (b) 링크 AB에 걸리는 힘을 구하라.

$m = 10$ kg, $\quad M = 11.0$ N·m, $\quad \mu_k = 0.40, \quad r = 0.225$ m, $\quad \theta = 30°$

$I_G = \quad = \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(0.225 \text{ m})^2 = 0.2531 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$



(b) 마찰력 $F =$

$\Sigma F_x = m\, a_{Gx}$;

$\Sigma F_y = m\, a_{Gy}$;

② $\Rightarrow \quad N = \dfrac{m\,g}{\sin\theta + \mu_k \cos\theta} = \dfrac{(10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)}{\sin 30° + (0.40)\cos 30°} = 115.9$ N

① $\Rightarrow \quad P = N(\cos\theta - \mu_k \sin\theta) = (115.9\text{ N})[\cos 30° - (0.40)\sin 30°) = 77.19$ N

(a) $F =$

$\Sigma M_G = I_G\, \alpha$; $\quad M - F\,r = I_G \ \alpha$

$$\alpha = \frac{M - Fr}{I_G} = \frac{(11.0\text{ N}\cdot\text{m}) - (46.36\text{ N})(0.225\text{ m})}{(0.2531\text{ kg}\cdot\text{m}^2)} = 2.248 \text{ rad/s}^2$$

$\alpha =$

6.5 강체역학의 공리에 관한 고찰 [a remark on the axioms of the mechanics of rigid bodies]

(생 략)

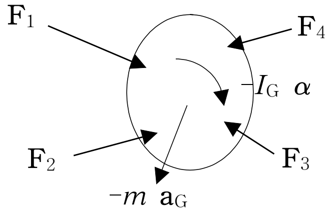
6.6 강체운동을 포함하는 문제의 해 (p. 1047)

[solution of problems involving the motion of a rigid body]

동적 평형 [dynamic equilibrium] (2.6절)

직선운동 $\Sigma \mathbf{F} = m\, \mathbf{a}_G \Rightarrow \Sigma \mathbf{F} + (-m\, \mathbf{a}_G) = 0 \quad -m\, \mathbf{a}_G$:

회전운동 $\Sigma \mathbf{M}_G = I_G\, \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \Sigma \mathbf{M}_G + (-I_G\, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad -I_G\, \boldsymbol{\alpha}$:



6.7 강체들의 계 [systems of rigid bodies] (p. 1048)

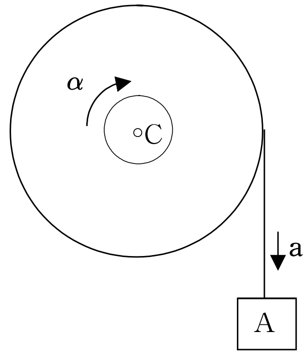
여러 개의 강체들이 서로 연결되어 있는 경우

(동적 평형을 적용하는) 자유물체도 사용 $\Sigma M_C = \Sigma (M_C)_{eff}$

예제 6.3 풀리의 회전과 블록의 운동 (p. 1051)

예.(연습 6.27) (p. 1059)

플라이휠의 반경이 600 mm이고, 질량이 144 kg이며, 회전반경은 450 mm이다. 18 kg의 블록 A가 플라이휠을 감싸는 철사에 매달려 있고, 정지상태에서 놓여진다. 마찰을 무시하고, (a) 블록 A의 가속도, (b) 블록 A가 1.8 m 이동하였을 때의 속도를 구하라.



r = 0.60 m, M = 144 kg, k = 0.450 m, m_A = 18 kg

$\mathbf{a}_A$ = ?, $\triangle y$ = 1.8 m → $\mathbf{v}_A$ = ?

I = = $(0.450\text{ m})^2(144\text{ kg})$ = 29.16 kg · m^2

a_A =

(a) ↺ $\Sigma M_C = \Sigma (M_C)_{eff}$

$m_A\, g \cdot r$ =

$= I\,\alpha + m_A\, r^2\,\alpha = (I + m_A\, r^2)\,\alpha$

$$\alpha = \quad = \frac{(18\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.60\text{ m})}{(29.16\text{ kg}\cdot\text{m}^2)+(18\text{ kg})(0.60\text{ m})^2} = 2.973\text{ rad/s}^2$$

$a_A = (0.60\text{ m})(2.973\text{ rad/s}^2) = 1.784\text{ m/s}^2$ $\mathbf{a}_A = 1784\text{ mm/s}^2\downarrow$

(b) $v^2 - v_0^2 = 2\,a\,\triangle y$, $v_0 = 0$

v = $= [2\,(1.784\text{ m/s}^2)(1.8\text{ m})]^{1/2} = 2.534\text{ (m/s)}$ $\mathbf{v}_A$ =