5.12 고정점에 대한 *회전*운동 [motion about a fixed point] (p. 1000)

(5.3절 고정축에 대한 회전운동) $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$

고정점에 대한 회전운동은 고정점을 통과하는 축에 대한 회전과 같다.

단, 회전축의 방향(즉, ω의 방향)이

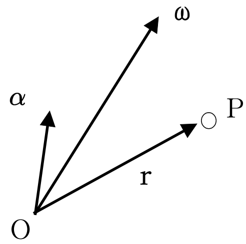
⇒ 순간회전축 [instantaneous axis of rotation] 존재

(5.7절 평면운동에서 순간회전중심) 과 유사한 성질

순간회전축에 놓인 점들의 속도 = , 가속도 =

각가속도 α는 각속도 ω의 크기 변화 뿐 아니라 방향 변화도 반영.

각가속도의 방향은



강체 내 질점의 속도 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$

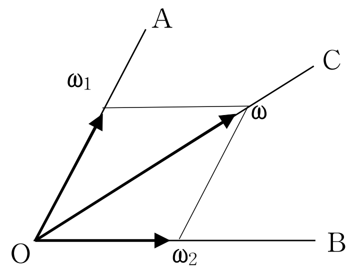
질점의 가속도 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$

각속도의 합성 (각속도의

한 순간에 축 OA에 대해 각속도 ω_1과

축 OB에 대해 각속도 ω_2로 동시에 회전할 때

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ 인 각속도 ω 방향의 축 OC에 대한 회전과 동등

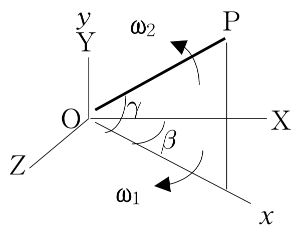


각가속도 $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt =$

예제 5.11 기중기 (p. 1004)

예.(연습 5.189) (p. 1009)

길이 OP = 3.6 m의 포신이 그림과 같이 포탑에 장착되어 있다. 움직이는 표적을 겨냥하기 위하여 방위각 β는 $d\beta/dt = 30°/s$의 비율로 증가하고 있고, 조준각 γ는 $d\gamma/dt = 10°/s$의 비율로 증가하고 있다. $\beta = 90°$이고 $\gamma = 30°$ 일 때, (a) 포신의 각속도, (b) 포신의 각가속도, (c) 점 P의 속도와 가속도를 구하라.



$r = 3.6$ m, $d\beta/dt = 30°/s$, $d\gamma/dt = 10°/s$, $\beta = 90°$, $\gamma = 30°$

(a) $\boldsymbol{\omega}_1 = d\beta/dt\ (-\mathbf{j}) =$ $(\pi\ \text{rad}/180°) = -0.524\ \text{rad/s}\ \mathbf{j}$

$\boldsymbol{\omega}_2 = d\gamma/dt\ (-\mathbf{i}) =$ $(\pi\ \text{rad}/180°) = -0.174\ \text{rad/s}\ \mathbf{i}$

$\boldsymbol{\omega} =$ $= -0.174\ \mathbf{i} - 0.524\ \mathbf{j}$ (rad/s)

(b) $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{Q}$ $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$

$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)$

$= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2 =$

$= -0.0912\ \mathbf{k}$ (rad/s^2)

(c) $\mathbf{r}_P = r\cos\gamma\cos\beta\ \mathbf{i} + r\sin\gamma\ \mathbf{j} + r\cos\gamma\sin\beta\ \mathbf{k}$

$= (3.6)\cos30°\cos90°\mathbf{i} + (3.6)\sin30°\mathbf{j} + (3.6)\cos30°\sin90°\mathbf{k} = 1.8\ \mathbf{j} + 3.12\ \mathbf{k}$ (m)

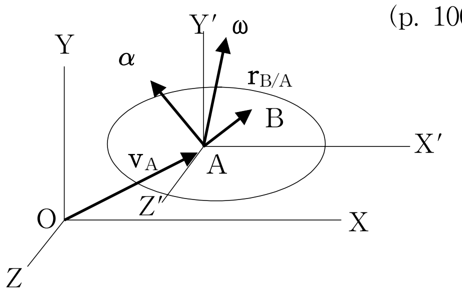
$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ 0 & 1.8 & 3.12 \end{vmatrix} = -1.63\ \mathbf{i} + 0.543\ \mathbf{j} - 0.313\ \mathbf{k}\ \text{(m/s)}$$

$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_P$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ 0 & 1.8 & 3.12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.174 & -0.524 & 0 \\ & & \end{vmatrix}$$

$= [0.164\ \mathbf{i}] + [0.164\ \mathbf{i} - 0.054\ \mathbf{j} - 0.948\ \mathbf{k}] = 0.328\ \mathbf{i} - 0.054\ \mathbf{j} - 0.949\ \mathbf{k}$ (m/s^2)

5.13 일반운동 [general motion] (p. 1003)



공간에 있는 강체의 가장 일반적인 운동

강체 내의 두 질점 A, B

A에 부착된 병진좌표계 AX′Y′Z′

고정좌표계 OXYZ에 대한 A, B의 속도 $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ (고정좌표계에 대한 B의

$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{B/A}$ (병진좌표계에 대한 B의

$\Rightarrow \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{B/A}$

고정좌표계 OXYZ에 대한 A, B의 가속도 $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ (고정좌표계에 대한 B의

$\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{B/A}$ (병진좌표계에 대한 B의

$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{B/A}$

강체의 일반운동 = 기준질점과 같은 속도, 가속도의 병진운동 + 기준질점 중심의 회전운동

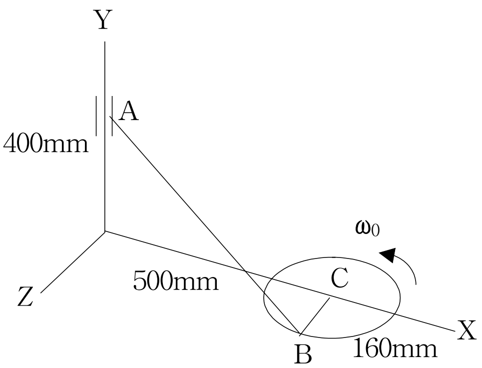
각속도 ω와 각가속도 α는

병진좌표계 대신 회전좌표계(병진+회전)를 사용하는 것이 종종 더 편리 → 5.14,15절

예제 5.12 회전원판과 막대와 칼러 (p. 1005)

예.(연습 5.196) (p. 1010)

막대 AB가 볼-소켓 조인트로 칼러 A와 지름 160 mm의 원판 C에 연결되어 있다. 원판 C가 zx 평면에서 일정한 각속도 ω_0 = 3 rad/s로 반시계방향으로 회전하고 있을 때, 그림과 같은 위치에서 칼러 A의 속도를 구하라.



$\boldsymbol{\omega}_0 = (3 \text{ rad/s})\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_A = \upsilon_A \mathbf{j}$ = ?

원판 ; $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{B/C}$ ($\boldsymbol{\omega}_0$ =

=

= (0.48 m/s) $\mathbf{i}$

막대 ; $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{A/B}$ ($\boldsymbol{\omega}$ =

$\upsilon_A \mathbf{j} = (0.48 \text{ m/s})\mathbf{i}$

+

$= 0.48\,\mathbf{i} + (-0.16\omega_y - 0.40\omega_z)\mathbf{i} + (-0.50\omega_z + 0.16\omega_x)\mathbf{j} + (0.40\omega_x + 0.50\omega_y)\mathbf{k}$

$\mathbf{i}$; $0 = 0.48 - 0.16\omega_y - 0.40\omega_z$ ⋯ ①

$\mathbf{j}$; $\upsilon_A = -0.50\omega_z + 0.16\omega_x$ ⋯ ②

$\mathbf{k}$; $0 = 0.40\omega_x + 0.50\omega_y$ ⋯ ③

-50 × ① + 40 × ② - 16 × ③

$\Rightarrow \quad 40\,\upsilon_A = -50 \times 0.48 \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_A = -0.60$ (m/s)

$\mathbf{v}_A$ =

5.14 회전좌표계에 대한 질점의 3차원 운동. 코리올리 가속도 (p. 1014)

[three-dimensional motion of a particle relative to a rotating frame]

5.10절 → $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = \Omega\times\mathbf{Q} + (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ (좌표계 Oxyz가 고정축 OA에 대하여 회전)

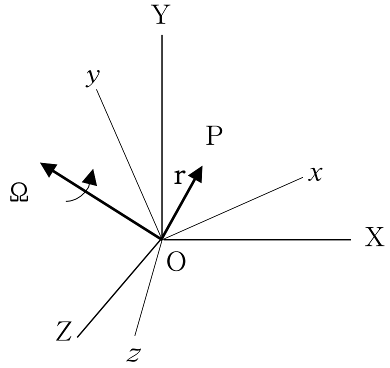
↓ 축 OA가 고정되지 않은 경우에도 유효

축 OA는 좌표계 Oxyz의 순간회전축

Ω는 고려된 순간의 좌표계의 각속도

5.11절의 관계식들을 3차원으로 확장

(좌표계 Oxyz가 고정점 O에 대하여 회전)



속도 (=

$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXYZ} = \Omega\times\mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz}$

$\Omega\times\mathbf{r}$: 회전좌표계(강체)의 점P′의 속도 ≡

$(\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz}$: 좌표계 Oxyz에 대한 질점 P의 상대속도 ≡

$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/F}$

가속도 (=

$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\Omega}\times\mathbf{r} + \Omega\times(\Omega\times\mathbf{r}) + 2\Omega\times(\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxyz}$

$\dot{\Omega}\times\mathbf{r}$: 회전좌표계(강체)의 점P′의 가속도의 접선방향 ≡

$\Omega\times(\Omega\times\mathbf{r})$: 〃 〃 〃 법선방향 ≡

$2\Omega\times(\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz}$: 코리올리 가속도 $= 2\Omega\times\mathbf{v}_{P/F}$ ≡

$(\ddot{\mathbf{r}})_{Oxyz}$: 좌표계 Oxyz에 대한 질점 P의 상대가속도 ≡

$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{Corr} + \mathbf{a}_{P/F}$

예제 5.13 구부러진 막대의 회전 (p. 1017)

<u>회전하는 기준좌표계</u> [rotating frames of references]

강체의 3차원 운동 해석에 특히 유용

(i) 고정점에 대해 회전하는 강체의 3차원 운동

예제 5.11 기중기 : 각 회전축에 대한 각속도(및 각가속도)의 합성으로 처리 (p. 1004)

예제 5.14 기중기 : 각 회전축에 대한 상대운동의 합으로 처리 (p. 1018)

한 축이 회전하는 좌표계의 운동 + 이 좌표계에 대한 상대회전운동

예.(연습 5.189(c)) (p. 1009)

길이 OP = 3.6 m의 포신이 그림과 같이 포탑에 장착되어 있다. 움직이는 표적을 겨냥하기 위하여 방위각 β는 $d\beta/dt$ = 30°/s의 비율로 증가하고 있고, 조준각 γ는 $d\gamma/dt$ = 10°/s의 비율로 증가하고 있다. β = 90°이고 γ = 30° 일 때, … (c) 점 P의 속도와 가속도를 구하라.

r = 3.6 m, $d\beta/dt$ = 30°/s, $d\gamma/dt$ = 10°/s, β = 90°, γ = 30°

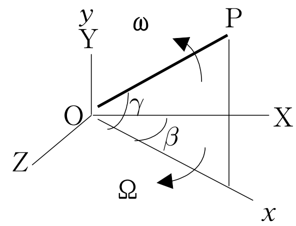
$\Omega = -d\beta/dt\ \mathbf{j} = (-30°/\text{s}\ \mathbf{j})(\pi\ \text{rad}/180°) = -0.524\ \text{rad/s}\ \mathbf{j}$

$\omega = d\gamma/dt\ (-\mathbf{i}) = (-10°/\text{s}\ \mathbf{i})(\pi\ \text{rad}/180°) = -0.174\ \text{rad/s}\ \mathbf{i}$

$\mathbf{r}_P = r\cos\gamma\cos\beta\ \mathbf{i} + r\sin\gamma\ \mathbf{j} + r\cos\gamma\sin\beta\ \mathbf{k}$

$= (4.0)\cos30°\cos90°\mathbf{i} + (4.0)\sin30°\mathbf{j} + (4.0)\cos30°\sin90°\mathbf{k}$

$= 2.0\ \mathbf{j} + 3.46\ \mathbf{k}$ (m)



$\mathbf{v}_P' = \quad = (-0.524\ \text{rad/s}\ \mathbf{j})\times[2.0\ \mathbf{j} + 3.46\ \mathbf{k}\ (\text{m})] = -1.813\ \mathbf{i}$ (m/s)

$\mathbf{v}_{P/F} = \quad = (-0.174\ \text{rad/s}\ \mathbf{i})\times[2.0\ \mathbf{j} + 3.46\ \mathbf{k}\ (\text{m})] = -0.348\ \mathbf{k} + 0.602\ \mathbf{j}$ (m/s)

$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P' + \mathbf{v}_{P/F} = -1.813\ \mathbf{i} + 0.602\ \mathbf{j} - 0.348\ \mathbf{k}$ (m/s)

$\mathbf{a}_{P}' =$

$= 0 + (-0.524 \text{ rad/s } \mathbf{j})\times[(-0.524 \text{ rad/s } \mathbf{j})\times(2.0\ \mathbf{j} + 3.46\ \mathbf{k}\ (\text{m}))]$

$= (-0.524 \text{ rad/s } \mathbf{j})\times(-1.813 \text{ m/s } \mathbf{i}) = -0.950\ \mathbf{k} \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_{P/F} =$

$= 0 + (-0.174 \text{ rad/s } \mathbf{i})\times[(-0.174 \text{ rad/s } \mathbf{i})\times(2.0\ \mathbf{j} + 3.46\ \mathbf{k}\ (\text{m}))]$

$= (-0.174 \text{ rad/s } \mathbf{i})\times(-0.348\ \mathbf{k} + 0.602\ \mathbf{j} \text{ m/s}) = (0.061\ \mathbf{j} - 0.105\ \mathbf{k}) \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_{Corr} = \qquad = 2\,(-0.524 \text{ rad/s } \mathbf{j})\times[-0.348\ \mathbf{k} + 0.602\ \mathbf{j}\ (\text{m/s})] = 0.364\ \mathbf{i} \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{Corr} + \mathbf{a}_{P/F} = (-0.950\ \mathbf{k}) + (0.364\ \mathbf{i}) + (-0.061\ \mathbf{j} - 0.105\ \mathbf{k}) \text{ m/s}^2$

$= 0.364\ \mathbf{i} - 0.061\ \mathbf{j} - 1.055\ \mathbf{k} \text{ m/s}^2$

(ii) 고정점이 없는 강체의 3차원 운동

예제 5.15 자전하며 공전하는 원판 (p. 1019)

<u>코리올리 가속도</u> [Coriolis acceleration] (p. 1015)

$\mathbf{a}_{Corr} = 2\Omega\times\mathbf{v}_{P/F}$

$\mathbf{a}_{Corr} \perp \Omega, \qquad \mathbf{a}_{Corr} \perp \mathbf{v}_{P/F}$

평면운동의 경우 ($\Omega \perp \mathbf{v}_{P/F}$) $\quad |\mathbf{a}_{Corr}| =$

3차원운동의 경우 $\quad |\mathbf{a}_{Corr}| =$

Ω // $\mathbf{v}_{P/F}$ 일 때 $\quad \mathbf{a}_{Corr} =$

$\Omega = 0$ 또는 $\mathbf{v}_{P/F} = 0$ 일 때 $\quad \mathbf{a}_{Corr} =$

5.15 일반운동하는 기준좌표계 [frame of reference in general motion] (p. 1015)

일반운동 = 병진운동 + 회전운동

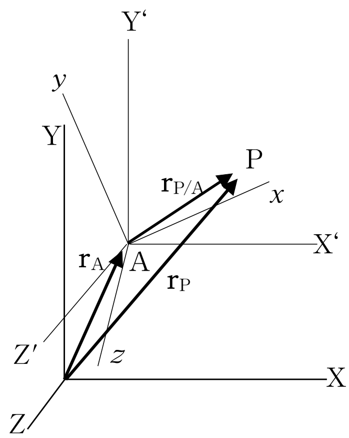
고정좌표계 OXYZ

↓ 좌표계의

AX′Y′Z′

↓ 좌표계의

일반운동 좌표계 A*xyz*



질점 P의 위치 $\quad \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A}$

속도 $\quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A}$

회전좌표계에 대해서 $\quad \mathbf{v}_{P/A} = \Omega\times\mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz}$

$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \Omega\times\mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz}$

$= \qquad \mathbf{v}_P' \qquad + \mathbf{v}_{P/F}$

가속도 $\quad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{P/A}$

회전좌표계에 대해서 $\mathbf{a}_{P/A} = \dot{\Omega}\times\mathbf{r}_{P/A} + \Omega\times(\Omega\times\mathbf{r}_{P/A}) + 2\Omega\times(\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz}$

$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega}\times\mathbf{r}_{P/A} + \Omega\times(\Omega\times\mathbf{r}_{P/A}) + 2\Omega\times(\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz}$

$= \qquad \mathbf{a}_P' \qquad + \qquad \mathbf{a}_{Corr} \qquad + \qquad \mathbf{a}_{P/F}$