제5장 강체의 운동학 [Kinematics of Rigid Bodies]

; 강체를 구성하는 여러 질점들의

강체 = 질량과 부피가 있으나 변형은 무시되는 물체 …

강체(3차원 물체)의 운동

평면(2차원)운동: 병진운동 (5.2절)

고정축에 대한 회전운동 (5.3-4절)

일반적인 평면운동 (5.5-11절) ; 병진+회전

공간(3차원)운동: 고정점에 대한 운동 (5.12절)

일반적인 운동 (5.13-15절)

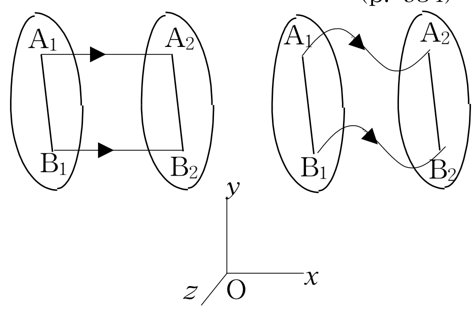
5.2 병진운동 [translation] (p. 934)

물체 내의 모든 질점들이 평행한 경로를 따라 운동

경로 : 직선경로 →

곡선경로 →

물체 내의 어떠한 선분도 운동 중 같은 크기와 방향 유지



(고정좌표계에 대한 강체 내의 두 질점 A, B에 관하여)

위치벡터 : $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$

$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ $\quad$ $\mathbf{r}_{B/A}$: 상대위치, 병진운동 중 일정한 크기와 방향

속도 : $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ $\quad$ $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_{B/A}) = 0$ → 상대속도

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$

가속도 : $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$ $\quad$ 상대가속도

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$

강체의 모든 점들이 동일한 속도와 동일한 가속도를 갖는다.

5.3 고정축에 대한 회전운동 [rotation about a fixed axis] (p. 935)

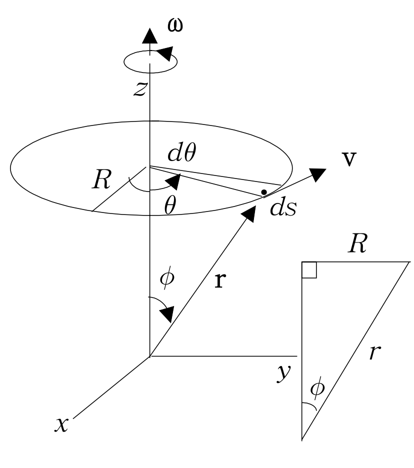
물체 내의 질점들이 동일한 고정축을 중심으로 갖는 원을 따라서 평행한 평면 내에서 운동

회전운동의 중심역할을 하는 고정축 →

고정좌표계의 한 축에 회전축을 일치시키고 운동해석을 하면 편리 (가령 z축).

각속도 $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ $(\omega=\dot{\theta})$, $\quad$ 각가속도 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ $(\alpha=\ddot{\theta})$

$R = r\sin\phi$, $\quad ds = R\,d\theta = r\sin\phi\,d\theta$



강체 내 질점 P의 <u>속도</u>

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = r\sin\phi\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}\sin\phi = r\,\omega\sin\phi$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$

위치벡터 $\mathbf{r}$은 회전축의 어디에서 출발

$\because \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_2 =$

강체 내 질점 P의 <u>가속도</u>

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\omega\times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\times\mathbf{r} + \omega\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \alpha\times\mathbf{r} + \omega\times\mathbf{v} = \alpha\times\mathbf{r} + \omega\times(\omega\times\mathbf{r})$$

$\downarrow$ $\quad\quad \perp \mathbf{v},\mathbf{k}$:

$//\mathbf{v}$:

예.(연습 5.11) (p. 943)

그림에 보인 사각 블록이 일정한 각속도 6.76 rad/s로 대각선 OA에 대하여 회전한다. A에서 볼 때 반시계방향으로 회전함을 알 때, 그림에 보인 순간에 점 B의 속도와 가속도를 구하라.

ω= 6.76 rad/s, α= 0, $\mathbf{v}_B$ = ?, $\mathbf{a}_B$ = ?

OA = 0.1 **i** + 0.624 **j** + 0.24 **k** (m), |OA| = $\sqrt{0.1^2+0.624^2+0.24^2}$ = 0.676 (m)

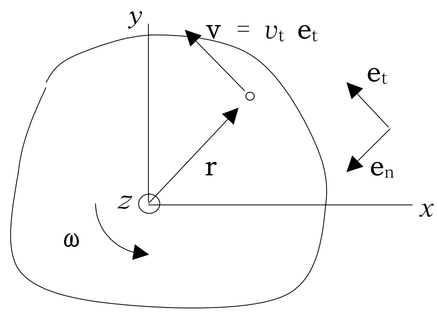
u = = 0.148 **i** + 0.923 **j** + 0.355 **k**

ω = = (6.76 rad/s)(0.148 **i** + 0.923 **j** + 0.355 **k**) = 1.00 **i** + 6.24 **j** + 2.40 **k** (rad/s) ,

$\mathbf{r}_B$ = 0.10 **i** + 0.312 **j** (m)

$$\mathbf{v}_B = \omega\times\mathbf{r}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.0 & 6.24 & 2.4 \\ & & \end{vmatrix} = -0.749\,\mathbf{i} + 0.240\,\mathbf{j} - 0.312\,\mathbf{k} \text{ (m/s)}$$

$$\mathbf{a}_B = \alpha\times\mathbf{r}_B + \omega\times\mathbf{v}_B = 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.0 & 6.24 & 2.4 \\ & & \end{vmatrix} = -2.52\,\mathbf{i} - 1.49\,\mathbf{j} + 4.91\,\mathbf{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$$



<u>평판의 회전운동</u> (2차원 물체의 2차원 운동)

회전축에 수직인 평판

각속도 $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, 각가속도 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$

$\omega>0$; 반시계방향 회전

속도 $\mathbf{v} = \omega\times\mathbf{r} = (\omega\mathbf{k})\times(-r\,\mathbf{e}_n) = -\omega r(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_n) =$

$\upsilon = r\,\omega$

가속도 $\mathbf{a} = \alpha\times\mathbf{r} + \omega\times\mathbf{v} = (\alpha\mathbf{k})\times(-r\,\mathbf{e}_n) + (\omega\mathbf{k})\times(r\omega\mathbf{e}_t) = -r\alpha(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_n) + r\omega^2(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_t)$

=

$a_t = r\,\alpha$, $a_n = r\,\omega^2$

예.(연습 5.21) (p. 944)

컨베이어 벨트에 의해 움직이는 일련의 작은 기계부품들이 반경 120 mm의 공전 풀리 위를 지나가고 있다. 현재의 순간에, 점 A의 속도는 왼쪽으로 300 mm/s이며, 가속도는 오른쪽으로 180 mm/s^{2}이다. (a) 공전 풀리의 각속도와 각가속도, (b) 점 B에서 기계부품의 전체 가속도를 구하라.

r_B = 0.12 m, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$ = 0.3 m/s←, $(\mathbf{a}_B)_t = \mathbf{a}_A$ = 0.18 m/s^2→

(a) $\upsilon_B =$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\omega = \dfrac{\upsilon_B}{r_B} = \dfrac{0.3\text{ m/s}}{0.12\text{ m}} = 2.5$ rad/s $\quad\boldsymbol{\omega}$ = 2.5 rad/s↺

$(a_B)_t =$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\alpha = \dfrac{(a_B)_t}{r_B} = \dfrac{0.18\text{ m/s}^2}{0.12\text{ m}} = 1.5$ rad/s $\quad\boldsymbol{\alpha}$ = 1.5 rad/s^2↺

(b) $(a_B)_n =$ $= (0.12\text{ m})\ (2.5\text{ rad/s})^2 = 0.75\text{ m/s}^2$

$$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2} = \sqrt{(0.18\text{ m/s}^2)^2 + (0.75\text{ m/s}^2)^2} = 0.771\text{ m/s}^2$$

$\beta = \tan^{-1}\dfrac{(a_B)_n}{(a_B)_t} = \tan^{-1}\dfrac{0.75}{0.18} = 76.5°$ $\quad\quad\mathbf{a}_B =$

5.4 고정축에 대한 회전운동을 정의하는 방정식 (직선운동과 비교)

[equations defining the rotation of a rigid body about a fixed axis] (p. 938)

회전 각좌표	θ	위치좌표	x
각속도	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	속도	$v = \dfrac{dx}{dt}$
각가속도	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	가속도	$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$
	$(\alpha = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta})$		$(a = v\dfrac{dv}{dx})$
등속 회전운동	$\alpha = 0$	등속도 운동	$a = 0$
	$\theta = \theta_0 + \omega\ t$		$x = x_0 + v\ t$
등가속 회전운동	α = 일정	등가속도 운동	a = 일정
	$\omega = \omega_0 + \alpha t$		$v = v_0 + a\ t$
	$\theta = \theta_0 + \omega_0\ t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$		$x = x_0 + v_0\ t + \dfrac{1}{2}a\ t^2$
	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$		$v^2 = v_0^2 + 2\ a\ (x-x_0)$

예제 5.1 풀리와 하중 (p. 936)

예.(연습 5.6) (p. 942)

전기모터는 동력이 공급되면 4초 후에 2400 rpm의 규정속도에 도달하고, 동력이 끊어지면 40초 후에 정지한다. 등가속 운동이라 가정하고, (a) 규정속도에 도달할 때까지 몇 바퀴 회전하는지, (b) 규정속도에서 정지하기까지 몇 바퀴 회전하는지 계산하라.

$$\omega_1 = 2400\ \text{r/min} = 2400\ \text{rev/min} \times \frac{1}{(60\,\text{s/min})} = 40\ \text{rev/s}$$

$\omega_0 = 0,\quad t = 4\ \text{s}$ 등가속회전운동

(a) $\omega_1 = \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = \dfrac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \dfrac{(40\,\text{rev/s}) - 0}{(4\,\text{s})} = 10\ \text{rev/s}^2$

$\omega_1^2 = \quad\Rightarrow\quad \theta_1 - \theta_0 = \dfrac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\,\alpha_1} = \dfrac{(40\,\text{rev/s})^2 - 0}{2\,(10\,\text{rev/s}^2)} = 80$ revolutions

(b) $\omega_2 = \omega_1 + \alpha_2 t \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \dfrac{0 - (40\,\text{rev/s})}{(40\,\text{s})} = -1.0\ \text{rev/s}^2$

$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha_2(\theta_2 - \theta_1) \quad\Rightarrow\quad \theta_2 - \theta_1 = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\,\alpha_2} = \dfrac{0 - (40\,\text{rev/s})^2}{2\,(-1.0\,\text{rev/s}^2)} = 800$ revolutions