4.7 질점계의 운동에너지 [kinetic energy of a system of particles] (p. 889)

= 계의 여러 질점들의 $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$

질점계 (또는 강체)의 운동

= 계의 질량중심 G의 운동 + G에 부착된 이동좌표계에 관한

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_i'$ $\Rightarrow$ $\mathbf{v}_i =$ $(\sum m_i = m,\ \sum m_i\mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_G,\ \sum m_i\mathbf{r}_i' = 0)$

$T = \frac{1}{2}\sum(m_i\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2}\sum[m_i\ (\mathbf{v}_G+\mathbf{v}_i')\cdot(\mathbf{v}_G+\mathbf{v}_i')]$

$= \frac{1}{2}\sum(m_i\ \mathbf{v}_G\cdot\mathbf{v}_G) + \sum(m_i\ \mathbf{v}_i'\cdot\mathbf{v}_G) + \frac{1}{2}\sum(m_i\ \mathbf{v}_i'\cdot\mathbf{v}_i')$

$= \frac{1}{2}(\sum m_i)v_G^2 + (\sum m_i\mathbf{v}_i')\cdot\mathbf{v}_G + \frac{1}{2}\sum m_i(v_i')^2 =$

$$T = \frac{1}{2}m\ v_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(v_i')^2$$

질량중심의 운동에너지 + 이동좌표계 $Gx'y'z'$에 관한 질점들의

4.8 일-에너지의 법칙. 질점계에 대한 에너지보존 (p. 891)

질점 P_i에 대하여 $(T_i)_1 + (U_i)_{1\to2} = (T_i)_2$

$(T_i)_1 = \frac{1}{2}m_i(v_i)_1^2,$ $(T_i)_2 = \frac{1}{2}m_i(v_i)_2^2,$ $(U_i)_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2}(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij})\cdot d\mathbf{r}_i$

전체 계에 대하여

$T_1 = \sum(T_i)_1$, $T_2 = \sum(T_i)_2$, $U_{1\to2} = \sum(U_i)_{1\to2}$

내력의 합 $(\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0)$과 내력의 모멘트의 합 $(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j\times\mathbf{f}_{ji} = 0)$은

$\mathbf{f}_{ij}\cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji}\cdot d\mathbf{r}_j =$

$U_{1\to2}$를 계산할 때, 외력 $\mathbf{F}_i$의 일뿐 아니라 내력 $\mathbf{f}_{ij}$의 일도 고려

$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

보존력(외력과 내력)에 의한 위치에너지 $U_{1\to2} = V_1 - V_2 = \sum_{i=1}^{n}(V_i)_1 - \sum_{i=1}^{n}(V_i)_2$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$: 질점계에 대한

4.9 질점계에 대한 충격량과 운동량의 법칙 (p. 891)

<u>선형운동량</u> $\sum\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} = d\mathbf{L}/dt$ $\Rightarrow$ $\sum\mathbf{F}\ dt = d\mathbf{L}$ $\Rightarrow$

$$\sum\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}dt = \int_{L_1}^{L_2}d\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{L}_1 + \sum\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}dt = \mathbf{L}_2$$

시간 t_1에서의 질점계의 운동량 + t_1에서 t_2까지의 외력들의 충격량

= 시간 t_2에서의 질점계의 운동량

<u>각운동량</u> (고정점 O에 대하여)

$\sum\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O = d\mathbf{H}_O/dt$ $\Rightarrow$ $\sum\mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$ $\Rightarrow$

$$\sum\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_O dt = \int_{(H_O)_1}^{(H_O)_2}d\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{H}_O)_1 + \sum\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

시간 t_1에서의 질점계의 각운동량 + t_1에서 t_2까지의 외력들의 각충격량

= 시간 t_2에서의 질점계의 각운동량

(임의의 고정점 C에 대하여) $(\mathbf{H}_C)_1 + \sum\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_C dt = (\mathbf{H}_C)_2$

외력이 없으면

$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$: 질점계의

$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$, $(\mathbf{H}_C)_1 = (\mathbf{H}_C)_2$: 임의의 고정점에 대한 질점계의

예제 4.3 (선형운동량 보존, 각운동량 보존) (p. 893)

4.4 (충격량-운동량 법칙 + 역학적 에너지 보존) (p. 894)

4.5 (선형운동량 보존 + 역학적 에너지 보존) (p. 895)

예.(연습4.44) (p. 898)

각각의 질량이 m인 세 개의 공이 마찰 없는 수평면을 자유로이 미끄러진다. 공 A와 B는 길이 l의 늘일 수 없고 탄력 없는 끈에 붙어서 그림과 같은 위치에 정지해 있고, 속도 $\mathbf{v}_0$로 움직이는 공 C가 공 B를 똑바로 부딪친다. 공 C가 공 B를 칠 때 끈은 느슨하고, B와 C는 완전탄성충돌이라고 가정할 때 (a) 끈이 팽팽해진 직후의 각 공의 속도, (b) 끈이 팽팽해질 때 소산된 계의 초기 운동에너지의 비율을 구하라.

$$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{3} = 19.5°, \qquad m_A + m_B + m_C = m, \qquad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_0$$

(a) C가 B를 칠 때

운동량 보존 ; $m_C\,\mathbf{v}_0 = m_B\,\mathbf{v}_B' + m_C\,\mathbf{v}_C' \;\Rightarrow\; v_0 =$ … ①

에너지 보존 ; $\frac{1}{2}m_C v_0^2 = \frac{1}{2}m_B(v_B')^2 + \frac{1}{2}m_C(v_C')^2 \;\Rightarrow\; v_0^2 =$ … ②

①, ② $\Rightarrow\; v_B' = v_0, \quad v_C' = 0$ $\qquad \mathbf{v}_C' =$

줄이 팽팽해질 때

$\mathbf{v}_A'' = v_A''\searrow\theta \qquad \mathbf{v}_B'' = \mathbf{v}_A'' + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{v}_{B/A} =$

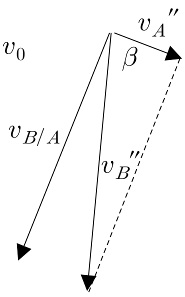
계의 운동량 보존 ; $m_B\,\mathbf{v}_B' = m_A\,\mathbf{v}_A'' + m_B\,\mathbf{v}_B''$

$\Rightarrow \quad \mathbf{v}_B' = \mathbf{v}_A'' + (\mathbf{v}_A'' + \mathbf{v}_{B/A})$

$\searrow\theta$; $\qquad \Rightarrow \quad v_A'' = \frac{1}{2}v_B'\sin\theta = \frac{1}{2}v_0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}v_0 = 0.167v_0$

$\mathbf{v}_A'' = 0.167v_0\searrow 19.5°$

$\swarrow\theta$; $\qquad \Rightarrow \quad v_{B/A} = v_0\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = 0.943v_0$



$v_B'' = \sqrt{0.167^2 + 0.943^2}\,v_0 = 0.958v_0$

$\beta = \tan^{-1}\frac{v_{B/A}}{v_A''} = \tan^{-1}\frac{0.943}{0.167} = 80.0°$

$180 - (80.0 + 19.5) = 80.5$

$\mathbf{v}_B'' =$

(b) 초기 운동에너지 $\qquad T_1 = \frac{1}{2}m\,v_0^2$

최종 운동에너지 $\qquad T_2 = \frac{1}{2}m\,(v_A'')^2 + \frac{1}{2}m(v_B'')^2 + \frac{1}{2}m(v_C')^2$

$$= \frac{1}{2}m v_0^2\,(0.167^2 + 0.957^2 + 0) = \frac{1}{2}m v_0^2\,(0.944)$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{1 - 0.944}{1} = 0.056$$

4.10 가변질점계 [variable systems of particles] (p. 902)

(생 략)

4.11 질점의 일정한 유동 [steady stream of particles]

(생 략)

4.12 질량을 얻거나 잃는 계 [systems gaining or losing mass] (p. 905)

(생 략)