4.4 **질점계의 질량중심의 운동** [motion of the mass center of a system of particles] (p. 876)

질량중심 [mass center], G

위치벡터 $\mathbf{r}_G = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(m_i\,\mathbf{r}_i)$ 에 의해 정의되는 점 G ←

여기서 $m = \sum m_i$:

직각좌표 성분 $\mathbf{r}_G = x_G\,\mathbf{i} + y_G\,\mathbf{j} + z_G\,\mathbf{k}$

$$x_G = \frac{1}{m}\sum(m_i\,x_i)\ , \quad y_G = \frac{1}{m}\sum(m_i\,y_i)\ , \quad z_G = \frac{1}{m}\sum(m_i\,z_i)$$

속도 → $m\,\mathbf{v}_G = \sum(m_i\,\mathbf{v}_i)$

뉴튼의 제2법칙

선형운동량 $\mathbf{L} = \sum(m_i\,\mathbf{v}_i) = m\,\mathbf{v}_G =$

$\dot{\mathbf{L}} = m\,\dot{\mathbf{v}}_G = m\,\mathbf{a}_G,\qquad \dot{\mathbf{L}} = \sum\mathbf{F}$

$\Rightarrow\ \sum\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_G \qquad \mathbf{a}_G$:

외력들의 작용을 받는 계의 질점들의 운동해석 =

즉, 질점계의 질량중심은 계의 모든 질량과 모든 외력들이 그 점에 집중되어 있는 것처럼 운동.

예.

주의 : 외력의 모멘트를 포함하지 않았다.

∵ 외력들의 G에 대한 모멘트의 합은 일반적으로 0이 아님 (4.5절)

예제 4.1, 4.2 외력이 없는 경우, 질점계의 선형운동량 보존 (p. 881)

예.(연습4.15) (p. 885)

500 kg의 우주선이 t = 0일 때 원점 O를 속도 $\mathbf{v}_0$ = (450 m/s)$\mathbf{i}$로 통과한다. 이때 갑자기 폭발하여 질량이 각각 300 kg, 150 kg, 50 kg인 A, B, C 세 부분으로 분리된다. t = 4s일 때 A와 B의 위치가 A(1200 m, -350 m, -600 m), B(2500 m, 450 m, 900 m)라고 관측되었을 때, C 부분의 위치를 구하라. 단 중력의 영향은 무시한다.

m = 500 kg, $\mathbf{v}_0$ = 450 m/s $\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_0$ = 0

m_A = 300 kg, m_B = 150 kg, m_C = 50 kg

t = 4 s, $\mathbf{r}_A = 1200\mathbf{i} - 350\mathbf{j} - 600\mathbf{k}$ (m), $\mathbf{r}_B = 2500\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + 900\mathbf{k}$ (m)

외력 = 0, $\mathbf{L}$ = 일정 ⇒ $m\mathbf{v}_G =$, $\mathbf{v}_G =$, $\mathbf{r}_G =$

$m\mathbf{v}_G = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C \qquad m\mathbf{r}_G = m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B + m_C\mathbf{r}_C$

$$\mathbf{r}_C = \frac{m}{m_C}\mathbf{r}_G - \frac{m_A}{m_C}\mathbf{r}_A - \frac{m_B}{m_C}\mathbf{r}_B$$

$$= \frac{500}{50} \qquad - \frac{300}{50}(1200\mathbf{i} - 350\mathbf{j} - 600\mathbf{k}) - \frac{150}{50}(2500\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + 900\mathbf{k})$$

$$= 18000\mathbf{i} - (7200\mathbf{i} - 2100\mathbf{j} - 3600\mathbf{k}) - (7500\mathbf{i} + 1350\mathbf{j} + 2700\mathbf{k})$$

$$= 3300\mathbf{i} + 750\mathbf{j} + 900\mathbf{k}\ \text{(m)}$$

4.5 질량중심에 대한 질점계의 각운동량 (angular momentum about its mass center) (p. 878)

고정좌표계 $Oxyz$에서 고정점 O에 대하여

$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ (4.3절)

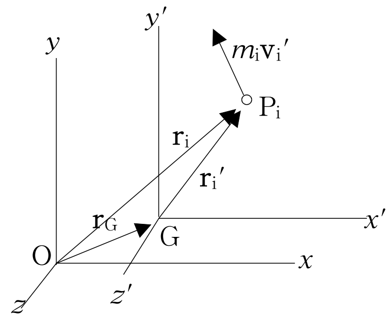
병진좌표계 $Gx'y'z'$에서 질량중심 G에 대하여

$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G' = \dot{\mathbf{H}}_G$

$\Sigma \mathbf{M}_G$: 외력들의 이동점 G에 대한 합모멘트

$\dot{\mathbf{H}}_G'$: 질점계의 G에 대한 *상대* 각운동량의 변화율

$\dot{\mathbf{H}}_G$: 질점계의 G에 대한 *절대* 각운동량의 변화율



질점 P_i의 $Gx'y'z'$에 대한 <u>상대위치벡터</u> $\mathbf{r}_i'$, 상대속도 $\mathbf{v}_i'$, 상대가속도 $\mathbf{a}_i'$ [증명 1단계]

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_i'$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i'$, $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_i'$

$m_i \mathbf{r}_i = m_i \mathbf{r}_G + m_i \mathbf{r}_i' \quad \rightarrow \quad \Sigma m_i\mathbf{r}_i = (\Sigma m_i)\mathbf{r}_G + \Sigma m_i\mathbf{r}_i' \quad \Rightarrow \quad \Sigma m_i\mathbf{r}_i' = 0$

질점계의 G에 대한 <u>상대 각운동량</u> $\mathbf{H}_G'$ [증명 2단계]

($Gx'y'z'$에 대한 상대운동의 G에 대한 각운동량)

$\mathbf{H}_G' = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i')$ →(시간 t에 대해 미분)

$\rightarrow \dot{\mathbf{H}}_G' = \Sigma[(\dot{\mathbf{r}}_i' \times m_i\mathbf{v}_i') + (\mathbf{r}_i' \times m_i\dot{\mathbf{v}}_i')] = \Sigma[(\mathbf{v}_i' \times m_i\mathbf{v}_i') + (\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{a}_i')] \quad \leftarrow \mathbf{a}_i' =$

$= \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i\mathbf{r}_i') \times \mathbf{a}_G = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{a}_i) = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i) = \Sigma(\mathbf{M}_G)_i$

$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G'$ (계의 질점들에 작용하는 외력들의 G에 대한 모멘트 합)

외력들의 G에 대한 합모멘트 = 질점계의 G에 대한

질점계의 G에 대한 <u>절대 각운동량</u> $\mathbf{H}_G$ [증명 3단계]

($Oxyz$에 대한 절대운동의 G에 대한 각운동량)

$\mathbf{H}_G = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i) \quad \leftarrow \mathbf{v}_i =$

$= (\Sigma m_i\mathbf{r}_i') \times \mathbf{v}_G + \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i') = \Sigma(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i') = \mathbf{H}_G'$

$\mathbf{H}_G' = \mathbf{H}_G$ →(시간 t에 대해 미분)→ $\dot{\mathbf{H}}_G' = \dot{\mathbf{H}}_G$

질점계의 G에 대한 상대 각운동량의 변화율 = 질점계의 G에 대한

$\therefore \Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G' = \dot{\mathbf{H}}_G$

고정점 O에 대한 각운동량과 운동하는 질량중심 G에 대한 각운동량의 관계 (연습 4.28)

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}[(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}_i') \times m_i\mathbf{v}_i] = \mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i)$$

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_G \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G$$

예.(연습 4.14) (p. 885)

문제 4.13의 질점계에 대하여, (a) 계의 질량중심 G의 위치벡터 $\mathbf{r}$, (b) 계의 선형운동량 $m\mathbf{v}$, (c) G에 대한 계의 각운동량 $\mathbf{H}_G$를 구하라. (d) 또한 이 문제와 문제 4.13의 해가 문제 4.28에서 주어진 관계식을 만족하는 것을 확인하라.

문제 4.13 $m_A = 3$ kg, $m_B = 2$ kg, $m_C = 4$ kg

$\mathbf{v}_A = 4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_C = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ (m/s)

$\mathbf{r}_A = 3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_B = 1.2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C = 3.6\,\mathbf{i}$ (m)

$\mathbf{H}_O = -4.8\,\mathbf{j} + 9.6\,\mathbf{k}$ (kg · m^2/s)

(a) $\mathbf{r}_G = \qquad = \frac{1}{9}[3(3\,\mathbf{j}) + 2(1.2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) + 4(3.6\,\mathbf{i})]$

$= (16.8\,\mathbf{i} + 13.8\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k})/9 = 1.87\,\mathbf{i} + 1.53\,\mathbf{j} + 0.67\,\mathbf{k}$ (m)

(b) $m\,\mathbf{v}_G =$ $= [3(4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}) + 2(4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}) + 4(-2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})]$

$= 12\,\mathbf{i} + 28\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$ (kg · m/s)

(c) $\mathbf{r}_A' = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_G = (3\,\mathbf{j}) - (1.87\,\mathbf{i} + 1.53\,\mathbf{j} + 0.67\,\mathbf{k}) = -1.87\,\mathbf{i} + 1.47\,\mathbf{j} - 0.67\,\mathbf{k}$ (m)

$\mathbf{r}_B' = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_G = (1.2\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (1.87\mathbf{i} + 1.53\mathbf{j} + 0.67\mathbf{k}) = -0.67\,\mathbf{i} + 0.87\,\mathbf{j} + 2.33\,\mathbf{k}$ (m)

$\mathbf{r}_C' = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_G = (3.6\,\mathbf{i}) - (1.87\,\mathbf{i} + 1.53\,\mathbf{j} + 0.67\,\mathbf{k}) = 1.73\,\mathbf{i} - 1.53\,\mathbf{j} - 0.67\,\mathbf{k}$ (m)

$\mathbf{H}_G = \sum(\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i) = m_A\,\mathbf{r}_A'\times\mathbf{v}_A + m_B\,\mathbf{r}_B'\times\mathbf{v}_B + m_C\,\mathbf{r}_C'\times\mathbf{v}_C$

$$= (3)\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (3)(4.28\mathbf{i} + 1.06\mathbf{j} - 9.62\mathbf{k}) + (2)(-6.99\mathbf{i} + 9.32\mathbf{j} - 5.49\mathbf{k}) + (4)(-0.38\mathbf{i} - 2.12\mathbf{j} + 3.86\mathbf{k})$

$= (12.84 - 13.98 - 1.52)\mathbf{i} + (3.18 + 18.64 - 8.48)\mathbf{j} + (-28.86 - 10.98 + 15.44)\mathbf{k}$

$= -2.7\,\mathbf{i} + 13.3\,\mathbf{j} - 24.4\,\mathbf{k}$ (kg · m^2/s)

(d) $\mathbf{r}_G\times m\mathbf{v}_G = (1.87\,\mathbf{i} + 1.53\,\mathbf{j} + 0.67\,\mathbf{k}) \times (12\,\mathbf{i} + 28\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ 12 & 28 & 14 \end{vmatrix} = 2.7\,\mathbf{i} - 18.1\,\mathbf{j} + 34.0\,\mathbf{k} \ (\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$$

$\mathbf{r}_G\times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G = (2.7\,\mathbf{i} - 18.1\,\mathbf{j} + 34.0\,\mathbf{k}) + (-2.7\,\mathbf{i} + 13.3\,\mathbf{j} - 24.4\,\mathbf{k})$

$= -4.8\,\mathbf{j} + 9.6\,\mathbf{k}$ (kg · m^2/s) $= \mathbf{H}_O$

4.6 질점계에 대한 운동량보존 (conservation of momentum for a system of particles) (p. 880)

$\dot{\mathbf{L}} = \sum\mathbf{F}$, $\dot{\mathbf{H}}_O = \sum\mathbf{M}_o$, $\dot{\mathbf{H}}_G = \sum\mathbf{M}_G$

(i) 계의 질점들에 외력이 작용하지 않으면 ($\mathbf{F}_i = 0$, $i=1,2,\cdots,n$)

$\dot{\mathbf{L}} = 0$, $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$, $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{L} =$, $\mathbf{H}_o =$, $\mathbf{H}_G =$

질점계의 선형운동량과 각운동량이 보존

(ii) 외력의 합이 0이면 ($\sum\mathbf{F} = 0$, $\sum\mathbf{M}_o \neq 0$, $\sum\mathbf{M}_G \neq 0$)

$\dot{\mathbf{L}} = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{L} =$

[(i)또는(ii) ; 질량중심 G의 운동 ; $m\mathbf{v}_G$ = 일정 $\Rightarrow$ $\mathbf{v}_G$ = 일정 (질량중심의 등속운동)]

(iii) 외력들의 고정점 O에 대한 모멘트 합이 0이면 ($\sum\mathbf{M}_O = 0$)

$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{H}_O =$

(iv) 외력들의 질량중심 G에 대한 모멘트 합이 0이면 ($\sum\mathbf{M}_G = 0$)

$\dot{\mathbf{H}}_G = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{H}_G =$