제4장　질 점 계 [Systems of Particles]

= 함께 고려되어야 하는 다수의 질점들

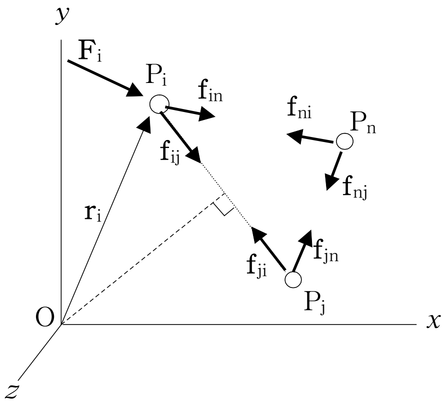
독립적인 질점들 → 서로 연결된 질점들 → 강체(의 운동역학 해석)

뉴튼의 제2법칙 (4.2-6절)

일과 에너지의 법칙 (4.7-8절)

충격량과 운동량의 법칙 (4.9절)

4.2 질점계의 운동에 대한 뉴튼법칙의 응용. 유효력 [effective forces]　(p. 872)



질점　P_i $(1 \le i \le n)$

질량　m_i

가속도　$\mathbf{a}_i$

외력[external forces]의 합　$\mathbf{F}_i$

내력[internal forces] $\mathbf{f}_{ij}$ (질점 P_j가 P_i에 가하는 힘)

내력의 합　$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}$

<u>힘의 평형</u>

질점 P_i에서

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = m_i\,\mathbf{a}_i \quad :$$

질점계에서

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{a}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}$$

$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} =$

질점계의 모든 내력의 합이

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} =$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{a}_i$$

외력 $\mathbf{F}_i$들의 합력 = 유효력 $m_i\,\mathbf{a}_i$들의 합력

<u>모멘트의 평형</u> (점O에 대하여)

질점 P_i에서

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i\,\mathbf{a}_i$$

질점계에서

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij})] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij})$$

$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} =$

질점계의 모든 내력의 모멘트의 합이

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) =$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{M}_O)_i$$

외력 $\mathbf{F}_i$들의 합모멘트 = 유효력 $m_i\,\mathbf{a}_i$들의 합모멘트

각 질점에 내력 $\mathbf{f}_{ij}$가 존재

4.3 질점계의 선형운동량 및 각운동량 [linear and angular momentum of a system of particles]

질점계의 선형운동량, L (p. 875)

= 계의 여러 질점(P_i)의 선형운동량($m_i\mathbf{v}_i$)의 합

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i$$

→(시간 t에 대해 미분)→ $\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$

$\sum\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$ (첨자 i 생략) 외력들의 합력 = 질점계의 선형운동량의 변화율

선형운동량 보존 : $\sum\mathbf{F} = 0$ 이면, $\mathbf{L} =$ (4.6절)

예.(연습4.7) (p. 884)

세 대의 똑같은 차량을 승용차 운반차에서 내리고 있다. 차 B와 C는 운반차에서 내리고 나서 브레이크를 풀어 놓은 상태로 정지해 있고, 차 A는 운반차에서 내려와서 1.728 m/s의 속도로 차 B에 부딪히고, 차 B는 차 C에 부딪힌다. 그리고 차 A는 다시 차 B와 부딪힌다. 차 B의 속도가 첫 번째 충돌 후에 1.512 m/s, 두 번째 충돌 후에 0.19 m/s, 세 번째 충돌 후에는 0.213 m/s라고 할 때, (a) 차 A와 C의 최종속도, (b) 각각의 충돌에 대한 반발계수를 구하라.

v_{A1} = 1.728 m/s, v_{B2} = 1.512 m/s, v_{B3} = 0.19 m/s, v_{B4} = 0.213 m/s

(a) A1→B1 ; $m\ v_{A1} + 0 = \qquad + m\ v_{B2}$ ⇒ v_{A2} = 1.728 − 1.512 = 0.216 (m/s)

B2→C2 ; $m\ v_{B2} + 0 = m\ v_{B3} + \qquad$ ⇒ v_{C3} = 1.512 − 0.19 = 1.322 (m/s)

A3→B3 ; $m\ v_{A2} + m\ v_{B3} = \qquad + m\ v_{B4}$ ⇒ v_{A4} = 0.216 + 0.19 − 0.213 = 0.193 (m/s)

(b) $e_{1\to2} = (v_{B2}-v_{A2})/\qquad$ = (1.512−0.216)/(1.728−0) = 0.750

$e_{2\to3} = (v_{C3}-v_{B3})/\qquad$ = (1.322−0.19)/(1.512−0) = 0.749

$e_{3\to4} = (v_{B4}-v_{A4})/\qquad$ = (0.213−0.193)/(0.216−0.19) = 0.769

질점계의 각운동량 (고정점 O에 대하여), $\mathbf{H}_O$

= 계의 여러 질점(P_i)의 (O에 대한) 각운동량($\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i$)의 합

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i)$$

→(시간 t에 대해 미분) →

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^{n}[(\dot{\mathbf{r}}_i\times m_i\mathbf{v}_i) + (\mathbf{r}_i\times m_i\dot{\mathbf{v}}_i)] = \sum_{i=1}^{n}[(\mathbf{v}_i\times m_i\mathbf{v}_i) + (\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{a}_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{M}_O)_i$$

$\sum\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ 외력들의 (O에 대한) 합모멘트 = 질점계의 (O에 대한) 각운동량의 변화율

각운동량 보존 : $\sum\mathbf{M}_O = 0$ 이면, $\mathbf{H}_O =$ (4.6절)

예.(연습4.13) (p. 885)

어떤 계가 세 질점 A, B, C로 구성되어 있다. m_A = 3 kg, m_B = 2 kg, m_C = 4 kg이고, 각 질점의 속도는 m/s 단위로 각각 $\mathbf{v}_A = 4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_C = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ 임을 알고 있다. O점에 대한 계의 각운동량 $\mathbf{H}_O$를 구하라.

세 질점의 위치벡터 (그림) $\mathbf{r}_A =\quad$, $\mathbf{r}_B =\quad$, $\mathbf{r}_C =$

$\mathbf{H}_O = \sum(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i) = m_A\,\mathbf{r}_A\times\mathbf{v}_A + m_B\,\mathbf{r}_B\times\mathbf{v}_B + m_C\,\mathbf{r}_C\times\mathbf{v}_C$

$$= (3)\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ & & \\ 4 & 2 & 2\end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ & & \\ 4 & 3 & 0\end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ & & \\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$= (3)(6\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) + (2)(-9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (4)(-7.2\mathbf{j} + 14.4\mathbf{k})$

$= (18 - 18)\mathbf{i} + (24 - 28.8)\mathbf{j} + (-36 - 12 + 57.6)\mathbf{k} = -4.8\,\mathbf{j} + 9.6\,\mathbf{k}$ (kg · m²/s)