

### 제3장 질점의 운동역학 : 에너지방법/운동량방법

[Kinetics of Particles : Energy and Momentum Methods]

운동역학[kinetics] : 물체의 질량, 힘, 운동의 관계.

힘  $\Rightarrow$  [물체(질량)]  $\Rightarrow$  운동

목표 : 가 필요하지 않은 방법으로 힘과 운동의 관계를 해석

뉴턴의 운동 제2법칙 : 힘  $-(F=ma) \rightarrow$  가속도  $-(\text{운동학}) \rightarrow$  속도, 위치

+ 운동학의 법칙들

= 일과 에너지 방법 :

충격량과 운동량 방법 :

#### 3.2 힘이 하는 일 [work of a force]

(p. 772)

힘  $\mathbf{F}$ 의 작용에 의해 변위  $d\mathbf{r}$ 이 발생할 때, 힘  $\mathbf{F}$ 의 일, 단위 :  $\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$  (joule)

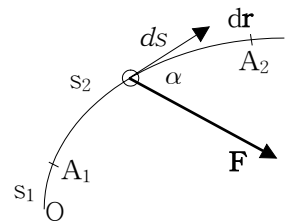
$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{힘 } \mathbf{F} \text{와 변위 } d\mathbf{r} \text{의 스칼라곱}) \quad \text{스칼라 양}$$

(i) 힘  $\mathbf{F}$ 의 크기  $F$ , 변위  $d\mathbf{r}$ 의 크기  $ds$ , 사이각  $\alpha$

$$dU = F ds \cos\alpha = (F \cos\alpha) ds =$$

(ii) 직교좌표성분

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

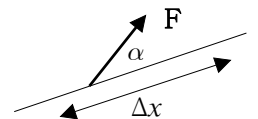


유한 변위에 대한  $\mathbf{F}$ 의 일

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

예1. 직선운동에 대해서 일정한 힘이 하는 일

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos\alpha) ds = (F \cos\alpha) \int_{s_1}^{s_2} ds =$$



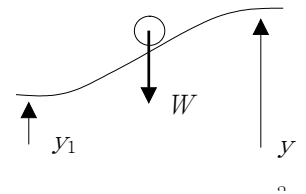
예2. 무게가 하는 일

$$\mathbf{F} = -W\mathbf{j}, \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -W dy$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{y_1}^{y_2} -W dy = -W(y_2 - y_1) =$$

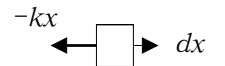
cf. 물체를 드는 힘이 하는 일 =



예3. 스프링에 의해서 가해지는 힘이 하는 일

$$F = kx \quad dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-kx\mathbf{i})(dx\mathbf{i}) = -kx dx$$

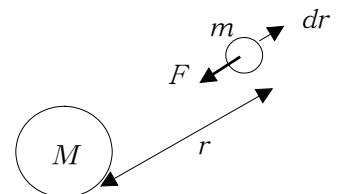
$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) =$$



예4. 중력이 하는 일

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad dU = -F dr = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



예5. 일을 하지 않는 힘들.

고정된 점에 가해지는 힘, 변위에 수직으로 가해지는 힘.

예:

### 3.3 질점의 운동에너지. 일과 에너지의 법칙

(p. 776)

[kinetic energy of a particle. principle of work and energy]

질점의 운동에너지

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{스칼라 양})$$

질점의 운동에너지 = 질점이 운동과 관련된 일을 할 수 있는 능력

운동에너지 단위 :  $(\text{kg})(\text{m/s})^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = (\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2) \cdot \text{m} =$

일 [work]

힘  $\mathbf{F}$ 가 질량  $m$ 인 질점에 작용하여 변위 발생 ( $A_1$ 부터  $A_2$ 까지)

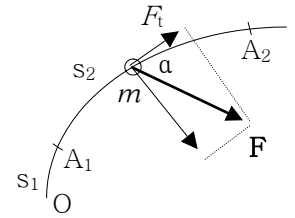
힘  $\mathbf{F}$ 의 접선방향 성분 (

$$F_t = m a_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = m v \frac{dv}{ds}$$

힘  $\mathbf{F}$ 가 한 일

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m v dv = m \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 =$$



일과 에너지의 법칙

$$U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad \text{힘 } \mathbf{F} \text{가 하는 일} =$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad \begin{array}{l} \text{초기 위치에서의 운동에너지} + \text{위치변화동안 힘 } \mathbf{F} \text{가 한 일} \\ = \text{나중 위치에서의 운동에너지} \end{array}$$

$$T_1 < T_2 \Rightarrow U_{1 \rightarrow 2} > 0 \quad ; \text{ 힘이 질점에 일을 함} \rightarrow \text{ 질점의 에너지를 증가시킴}$$

$$T_1 > T_2 \Rightarrow U_{1 \rightarrow 2} < 0 \quad ; \text{ 질점이 외부에 일을 함} \rightarrow \text{ 질점의 에너지가 감소함}$$

예제 3.1 경사길 자동차, 제동시 정지할 때까지 거리

(p. 781)

예제 3.2 두 블록의 운동

예.(연습3.13)

(p. 789)

철광석 채굴장치에서 광석으로 가득찬 두레박 B가 정지한 다리를 따라 천천히 움직이는 이동 크레인 매달려 있다. 크레인이 갑자기 정지할 때 두레박이 수평으로 4 m 이상 흔들리지 않도록 하려 한다. 크레인의 최대 허용속도를 구하라.

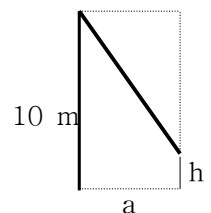
$$v_1 = ? \quad v_2 = 0 \quad a \leq 4 \text{ m}$$

$$T_1 = \quad U_{1 \rightarrow 2} = \quad T_2 = 0$$

$$h = (10 \text{ m}) - \sqrt{(10 \text{ m})^2 - (4 \text{ m})^2} = 0.834 \text{ m}$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.834 \text{ m})} = 4.05 \text{ m/s}$$



3.4 일과 에너지 법칙의 이용 [applications of the principle of work and energy]

(p. 778)

- 장점
1. 힘, 변위, 속도 간의 문제를 간단히 처리 :
  2. 스칼라 양(일, 에너지)을 고려: 직접 합산 가능,
  3. 일을 하지 않는 힘들은 이용하지 않음

예. 진자[pendulum] 길이  $\ell$ , 질량  $m$

줄의 장력  $P$ 는 경로에 수직  $\rightarrow$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W\Delta y = mg\ell, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2}m v_2^2$$

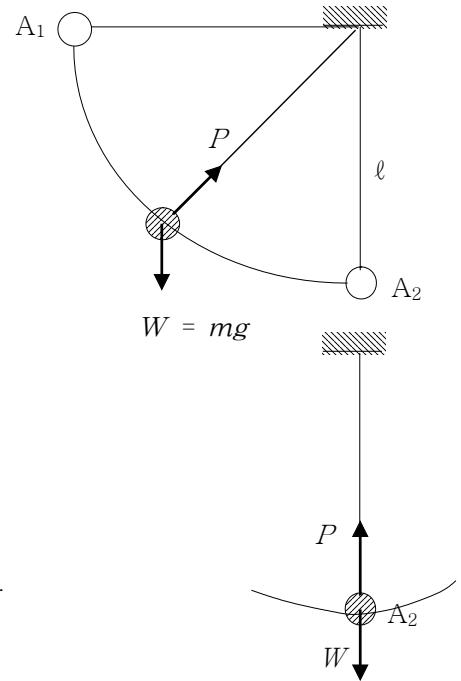
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2g\ell}$$

- 단점
1. 가속도를 직접 구하지 못함
  2. 일을 하지 않는 힘을 구하기 위해서는 뉴턴의 제2법칙을 적용하여 보완하여야 함

예. 추가  $A_2$ 를 지날 때, 줄에 가해지는 장력  $P$

$$, \quad W = mg, \quad a_n = \frac{v_2^2}{\ell} = \frac{2g\ell}{\ell} = 2g$$

$$P = mg + m(2g) = 3mg$$



(p. 782)

예제 3.3 마찰력과 스프링의 복원력이 하는 일

예제 3.4 위치에 따른 에너지 변환과 일

예.(연습3.25)

(p. 791)

300 g 블록이 200 g 블록의 위에 놓여 있고, 200 g 블록은 스프링 상수가 135 N/m인 스프링 위에 떠 받쳐 있지만 붙어있지는 않다. 위 블록이 갑자기 제거된다. (a) 200 g 블록의 최대 속도, (b) 200 g 블록의 최대 높이를 구하라.

$$m_A = 0.2 \text{ kg}, \quad m_B = 0.3 \text{ kg}, \quad k = 135 \text{ N/m}, \quad v_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{스프링 } F_s = \quad , \quad \delta = \frac{(m_A + m_B)g}{k} = \frac{(0.2 \text{ kg} + 0.3 \text{ g})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(135 \text{ N/m})} k = 0.0363 \text{ m}$$

(a) 블록 A의 최대속도,  $v_{\max} (= v_2)$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_A v_2^2, \quad U_{1 \rightarrow 2} = \int_0^{y_2} (F_s + F_A) dy = k (\delta y_2 - \frac{1}{2} y_2^2) - m_A g y_2$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \Rightarrow 0 + (k\delta - m_A g) y_2 - \frac{1}{2} k y_2^2 = \frac{1}{2} m_A v_2^2, \quad dv_2 / dy_2 =$$

$$\Rightarrow (k\delta - m_A g) - k y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \delta - \frac{m_A g}{k} = 0.0218 \text{ m}$$

$$v_{\max} = v_2 = \left\{ \frac{2}{m_A} \left[ (k\delta - m_A g) y_2 - \frac{1}{2} k y_2^2 \right] \right\}^{1/2} = \dots = 0.566 \text{ m/s}$$

(b) 블록 A의 최대높이,  $y_{\max} (= y_3)$

$$v_3 = 0 \Rightarrow \quad = 0. \quad U_{1 \rightarrow 3} = \int_0^\delta F_s dy + \int_0^{y_3} F_A dy = k (\delta\delta - \frac{1}{2}\delta^2) - m_A g y_3$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 3} = T_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{\max} = y_3 = \frac{k\delta^2}{2m_A g} = \frac{(135 \text{ N/m})(0.0363 \text{ m})^2}{2(0.2 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.0453 \text{ m}$$

### 3.5 일률과 효율 [power and efficiency]

(p. 779)

#### 일률 [power]

행하여지는 일의 시간에 대한 비율  $= \frac{dU}{dt}$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

단위 : N · m/s = J/s = W (watt)

예제 3.5 승강기 일률

#### 효율 [efficiency]

역학적 효율 (mechanical efficiency)

$$\eta = \frac{\text{출력 일}}{\text{입력 일}} = \frac{\text{출력 일률}}{\text{입력 일률}} < 1$$

마찰에 의한 역학적 에너지 손실

역학적 에너지



전기적 에너지      열 에너지

전체 효율 (overall efficiency)

$$\eta = \frac{\text{출력 일}}{\text{입력 일}} = \frac{\text{출력 일률}}{\text{입력 일률}} < 1$$

다양한 에너지 손실