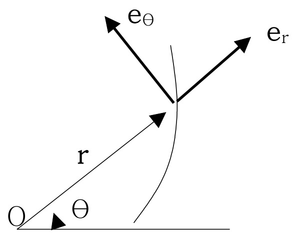
(순서 바꾸어 2.7절 보다 먼저)

2.8 반경방향과 횡방향 성분에 의한 운동방정식 (p. 736)

[equations of motion in terms of radial and transverse components]



힘에 의한 질점의 평면운동을 극좌표(r,Θ)로 표현

위 치 : $\mathbf{r} = r\ \mathbf{e}_r$

속 도 : $\mathbf{v} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r + r\ \dot{\theta}\ \mathbf{e}_\Theta$

가속도: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \mathbf{e}_\Theta$

$a_r \qquad\qquad a_\Theta$

$\Sigma F_r = m\ a_r = m\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2),\quad \Sigma F_\Theta = m\ a_\Theta = m\ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

예제 2.7 일정 각속도 암(arm)에서 미끄러지는 블록의 운동 (p. 740)

예.(연습2.68) (p. 743)

3 kg의 칼러 B가 마찰이 없는 암 AA′에서 미끄러지고 있다. 암은 드럼 D에 부착되어 있고, 수평면상에서 O점을 중심으로 $\dot{\theta} = 0.8t$의 속도로 회전하고 있다. 암-드럼 구조물이 회전함에 따라서 드럼 안에서는 줄을 풀어서, 칼러가 O점에서 멀어지는 방향으로 0.5 m/s의 일정한 속도로 움직이게 된다. $t = 0$인 순간 $r = 0$일 때, 줄의 장력이 암 AA′에 의해 칼러 B에 가해지는 수평면상의 힘의 크기와 같아지는 시간을 구하라.

$m = 3\ \text{kg},\qquad \dot{\theta} = 0.8\ t\ (\text{rad/s}),\qquad v_r = \dot{r} = 0.5\ \text{m/s}$

$r = \int_0^r dr = \int_0^t \frac{dr}{dt}\ dt = \int_0^t (0.5\ \text{m/s})\ dt = 0.5\ t\ (\text{m}),\qquad \ddot{r} = 0,\qquad \ddot{\theta} = 0.8\ \text{rad/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (0.5\ t)(0.8\ t)^2 = -\ 0.32\ t^3\ (\text{m/s}^2)$

$a_\Theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.5\ t)(0.8) + 2(0.5)(0.8\ t) = 1.2\ t\ (\text{m/s}^2)$

$\nearrow \Sigma F_r = m\ a_r :\qquad = m\ a_r \qquad\qquad \nwarrow \Sigma F_\theta = m\ a_\Theta :\qquad = m\ a_\Theta$

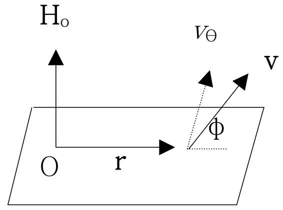
$T = Q \quad \Rightarrow \quad -m\ a_r = m\ a_\Theta \qquad \Rightarrow \qquad -\ a_r = a_\Theta$

$0.32\ t^3 = 1.2\ t \qquad \Rightarrow \qquad t^2 = 3.75 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1.94\ \text{s}$

2.7 질점의 각운동량 [angular momentum of a particle].

각운동량 변화율 [rate of change of angular momentum]

<u>각운동량</u> = 운동량의 모멘트



$\mathbf{H}_o = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$ (cf. 힘의 모멘트 $\mathbf{M}_o =$

$H_o = r\ mv\ \sin\phi$ 단위 : $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

(극좌표 표현 $v\ \sin\phi = v_\Theta = r\ \dot{\theta}$)

$= m\ r\ v\ \sin\phi = m\ r\ v_\Theta = m\ r\ (r\ \dot{\theta}) = m\ r^2\ \dot{\theta}$

위치벡터 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 속도벡터 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

$$\mathbf{H}_o = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\,v_x & m\,v_y & m\,v_z \end{vmatrix}$$

질점이 xy평면 내에서 움직이는 경우 $\mathbf{H}_o = H_z\ \mathbf{k}$,

$$H_o = H_z = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} & & \\ x & y & z \\ m\,v_x & m\,v_y & m\,v_z \end{vmatrix}$$

각운동량의 변화율

$$\dot{\mathbf{H}}_o = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_o) = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}\times(m\mathbf{v})] = [\frac{d}{dt}\mathbf{r}\times(m\mathbf{v})]+[\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})] = \dot{\mathbf{r}}\times(m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\times(m\dot{\mathbf{v}})$$

$$= \mathbf{v}\times(m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\times(m\mathbf{a}) = 0 + \mathbf{r}\times(m\mathbf{a}) = \mathbf{r}\times\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{M}_o$$

$\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$ $\qquad\qquad$ $m\mathbf{a}=\Sigma\mathbf{F}$

$\dot{\mathbf{H}}_o = \Sigma\mathbf{M}_o$ $\qquad\qquad$ cf. $\dot{\mathbf{L}}$ =

O점에 대한 각운동량의 변화율 =

2.9 중심력에 의한 운동 [motion under a central force].

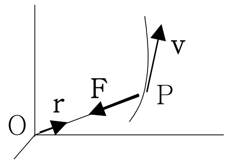
각운동량의 보존 [conservation of angular momentum]

중심력

고정된 점 O와 운동하는 질점 P에 대해

PO 또는 OP 방향으로 작용하는 힘. (모멘트를 만들지 못함)

이때의 O점 :



각운동량의 보존

중심력 $\mathbf{F}$에 대해 $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$이므로, $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$ $\quad$ $\mathbf{M}_o = 0$, 즉 $\dot{\mathbf{H}}_o = 0$

t에 대해 적분 $\quad$ $\mathbf{H}_o$ = 상수 (일정)

⇒ 중심력에 의하여 운동하는 질점의 각운동량 벡터는 일정하다.

$\mathbf{H}_o = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ = 일정

$\mathbf{r}\perp\mathbf{H}_o$, $\mathbf{v}\perp\mathbf{H}_o$

⇒ 중심력에 의한 질점의 운동($\mathbf{r}$,$\mathbf{v}$)은 $\mathbf{H}_o$에 수직인 평면(즉 $\mathbf{r}$,$\mathbf{v}$를 포함하는 평면) 내에 국한.

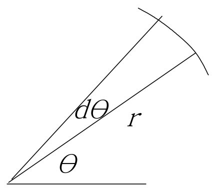
극좌표 표현 $\quad H_o = m\, r^2\, \dot{\theta}$

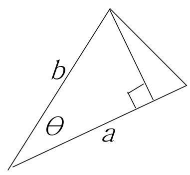
단위질량당 각운동량 $\quad h = H_o/m = r^2\, \dot{\theta}$

의미 : $\quad dA = \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2 \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2\, \dot{\theta}$$

면적속도





$A=\frac{1}{2}a(b\ \sin\Theta)$

$\Theta \approx 0,\ \sin\Theta \approx \Theta$

$A = \frac{1}{2}ab\Theta$

h = 질점의 면적속도의 두배

질점이 중심력에 의한 운동을 할 때, 질점의 면적속도가 일정

예. 태양과의 인력에 의해 공전 운동하는 행성 [planet]

지구와의 〃 〃 인공위성 [satellite]

예제 2.8 인공위성 (p. 740)

예.(연습2.90) (p. 747)

200g의 볼 A와 400g의 볼 B가 수직축을 따라서 자유롭게 회전하는 수평막대에 달려 있다. 볼은 그림에 나와있는 위치에 핀으로 고정되어 있다. 이제 B를 고정한 핀이 갑자기 제거되고 막대가 회전함에 따라 볼이 움직여서 C 위치로 움직이게 된다. 마찰과 막대의 질량을 무시하고, A의 초기속도가 v_A = 2.5 m/s일 때 (a) 핀이 제거된 직후 볼 B의 반경방향과 횡방향 가속도 성분, (b) 같은 순간에 볼 B의 막대에 대한 상대가속도, (c) 볼 B가 C점에 도달한 후 볼 A의 속도를 구하라.

m_A = 0.2 kg, m_B = 0.4 kg, r_A = 0.25 m, r_B = 0.2 m, r_C = 0.4 m, $(v_A)_0$ = 2.5 m/s

(a) $t = 0$, $\quad F_r = 0$, $\quad F_\Theta = 0$ $\quad$ ⇒ $\quad$ $(a_B)_{r0} = 0$, $\quad (a_B)_{\Theta 0} = 0$

(b) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$ $\qquad\qquad \dot{\theta} = \dfrac{(v_A)_0}{r_A} = \dfrac{2.5}{0.25} = 10$ (rad/s)

$\Rightarrow$ $a_{B/rod}$ = $\qquad\qquad$ = (0.2) $(10)^2$ = 20 (m/s^2)

(c) $r_A \; m_A \; (v_A)_0 + r_B \; m_B \; (v_B)_0 = r_A \; m_A \; v_A + r_C \; m_B \; v_B$

$(v_B)_0 = r_B \, \dot{\theta}$ = (0.2 m)(10 rad/s) = 2.0 m/s, $\qquad v_B = r_C \dfrac{v_A}{r_A}$

(0.25)(0.2)(2.5) + (0.2)(0.4)(2.0) = [(0.25)(0.2) + (0.4)(0.4) $\dfrac{0.4}{0.25}$] v_A

$\Rightarrow$ v_A = 0.931 m/s

2.10 뉴튼의 만유인력 법칙 [Newton's law of gravitation] (p. 738)

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

G : 만유인력 상수 [constant of gravitation]

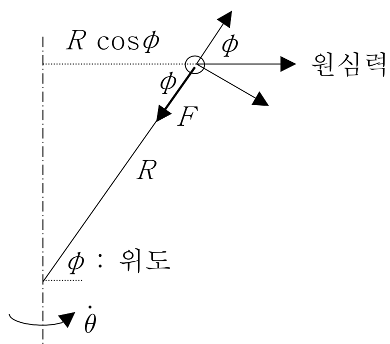
= (66.73±0.03)×10^{-12} m^3/kg · s^2 $\qquad$ ← 실험

<u>중력가속도</u>, g

$$G\frac{Mm}{r^2} = mg$$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{(66.7\times10^{-12}\,\mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(598\times10^{24}\,\mathrm{kg})}{(6.37\times10^6\,\mathrm{m})^2} = 9.83 \text{ m/s}^2$$

지구의 자전을 고려 (연습 2.1)



$$\dot{\theta} \approx \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{24\times3600\,\mathrm{s}}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} - m\,(R\cos\phi)\dot{\theta}^2\cos\phi = mg'$$

$$g' = \frac{GM}{R^2} - R\,\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$

$$= g - R\,\dot{\theta}^2\,(1 - \sin^2\phi\,)$$

$$= (g - R\,\dot{\theta}^2) + R\,\dot{\theta}^2\sin^2\phi$$

$$= (g - R\,\dot{\theta}^2)\left[1 + \frac{R\dot{\theta}^2}{g - R\dot{\theta}^2}\sin^2\phi\right]$$

$$= 9.781\,(1 + 0.0053\,\sin^2\phi) \quad (\mathrm{m/s^2})$$

2.11 중심력에 의한 질점의 궤적 [trajectory of a particle under a central force] (p. 748)

(생 략)

2.12 우주역학에의 응용 [application to space mechanics] (p. 749)

(생 략)

2.13 행성의 운동에 대한 케플러의 법칙 [Kepler's laws of planetary motion] (p. 752)

(생 략)