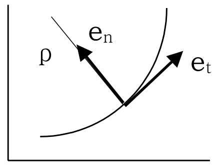
1.13 접선방향과 법선방향 성분 [tangential and normal components] (p. 681)

목표 : 가속도를 접선방향 성분과 법선방향 성분으로 분해

∵ 속도 방향 =

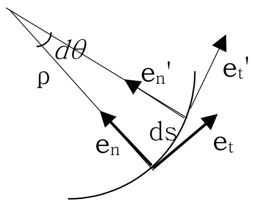
<u>질점의 평면운동</u> [plane motion of a particle]



속 도 : 질점경로의 접선벡터 $\mathbf{v} = \upsilon\ \mathbf{e}_t$

$\mathbf{e}_t$ = 접선방향 단위벡터, $\mathbf{e}_n$ = 법선방향 단위벡터

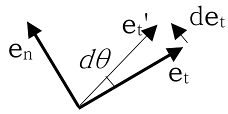
가속도: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d(\upsilon\ \mathbf{e}_t)}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dt}\mathbf{e}_t + \upsilon\dfrac{d\ \mathbf{e}_t}{dt}$



$$\frac{d\ \mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\ \mathbf{e}_t}{d\Theta}\ \frac{d\Theta}{ds}\ \frac{ds}{dt} =$$

$$d\ \mathbf{e}_t = 1 \cdot d\Theta \cdot \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} = \mathbf{e}_n$$

$$ds = \rho\ d\Theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{ds} =$$



$$\frac{ds}{dt} =$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{\upsilon^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$

접선방향 가속도 성분 $a_t = d\upsilon/dt$ (속력의 변화율)

법선방향 가속도 성분 $a_n = \upsilon^2/\rho$ (속력의 제곱÷경로의 곡률반경)

질점의 가속도가 0이 되려면,

곡선 설계시 가속도의 급격한 변화를 피하기 위하여,

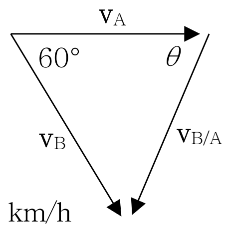
예 :

예제 1.10 곡선철도를 달리는 열차, 제동 중의 가속도. (p. 686)

예제 1.11 투사체 포물선 궤도의 최소곡률반경

예. (연습 1.141) (p. 691)

비행기 경주에서 그림과 같은 순간에, 비행기 A는 수평하게 직선으로 날고 6 m/s^{2}의 비율로 가속하고 있다. 비행기 B는 비행기 A와 같은 고도로 날고, 철탑 주위를 반경 200 m의 원 궤도로 돈다. 그림과 같은 순간에 B가 2 m/s^{2}의 비율로 감속하고 있는 걸 알 때, 주어진 위치에서 (a) A에 대한 B의 상대속도, (b) A에 대한 B의 상대가속도를 구하라.



a_A = 6 m/s^2, ρ_B = 200 m, $(a_B)_t$ = −2 m/s^2,

υ_A = 420 km/h = , υ_B = 520 km/h =

(a) $\mathbf{v}_{B/A}$; cosine 공식 $\upsilon_{B/A}^2 = \upsilon_A^2 + \upsilon_B^2 - 2\ \upsilon_A \upsilon_B \cos\alpha$

$\Rightarrow \upsilon_{B/A} = [117^2 + 144^2 - 2(117)(144)\cos 60°]^{1/2}$ = 133 m/s = 477 km/h

sine 공식 $\dfrac{\upsilon_B}{\sin\theta} = \dfrac{\upsilon_{B/A}}{\sin 60°} \quad \Rightarrow \quad \Theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{144}{133}\sin 60°\right) = 69.7°$

$\mathbf{v}_{B/A}$ =

(b) $\mathbf{a}_{B/A}$; $\mathbf{a}_A$ = 6 m/s^2→, $\mathbf{a}_B = (a_B)_t↘ + (a_B)_n↙$, $(a_B)_n = \dfrac{\upsilon_B^2}{\rho_B} = \dfrac{(144\,\mathrm{m/s})^2}{200\,\mathrm{m}}$ = 104 m/s^2

$\mathbf{a}_B$ = (−2)(**i** cos60°− **j** sin60°) + 104(−**i** cos30°− **j** sin30°) = −91.1 **i** − 50.3 **j** m/s^2

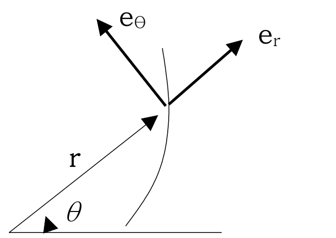
$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$ = (−91.1 **i** − 50.3 **j**) − (6 **i**) = −97.1 **i** − 50.3 **j** m/s^2 =

<u>공간에서 질점의 운동</u> [motion of a particle in space] (생략)

1.14 **반경방향과 횡방향 성분** [radial and transverse components] (p. 684)

목표 : 속도와 가속도를 반경방향 성분과 횡방향 성분으로 분해

∵ 질점의 위치벡터 방향 =



<u>질점의 평면운동</u> [plane motion of a particle]

: 극좌표[polar coordinate] 표현

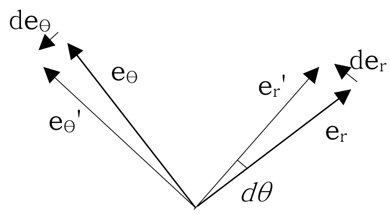
위치벡터 : $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$

$\mathbf{e}_r$ = 반경방향 단위벡터, $\mathbf{e}_\Theta$ = 횡방향 단위벡터

속 도 : $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d(r\ \mathbf{e}_r)}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\dfrac{d\ \mathbf{e}_r}{dt}$

$\dfrac{dr}{dt} = \dot{r}$,

$\dfrac{d\ \mathbf{e}_r}{dt} = \dfrac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ =



$\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$d\ \mathbf{e}_r = 1 \cdot d\Theta \cdot \mathbf{e}_\Theta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\Theta$

$\mathbf{v} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r + r\ \dot{\theta}\ \mathbf{e}_\Theta$

반경방향 속도 성분 $v_r = \dot{r}$, 횡방향 속도 성분 $v_\Theta = r\ \dot{\theta}$

가속도 : $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r) + \dfrac{d}{dt}(r\dot{\theta}\mathbf{e}_\Theta) = (\ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dfrac{d\ \mathbf{e}_r}{dt}) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\Theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\Theta + r\dot{\theta}\dfrac{d\ \mathbf{e}_\Theta}{dt})$

$\dfrac{d\ \mathbf{e}_\Theta}{dt} = \dfrac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}\ \dfrac{d\theta}{dt}$ =

$d\ \mathbf{e}_\Theta = 1 \cdot d\Theta \cdot (-\mathbf{e}_r) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$

$\mathbf{a} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\ \mathbf{e}_\Theta + \dot{r}\dot{\theta}\ \mathbf{e}_\Theta + r\ddot{\theta}\ \mathbf{e}_\Theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}(-\mathbf{e}_r)$

$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \mathbf{e}_\Theta$

반경방향 가속도 성분 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, 횡방향 가속도 성분 $a_\Theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

원운동의 경우

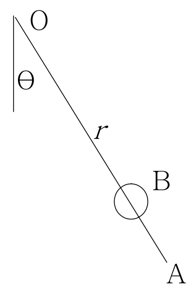
r = 상수, $\dot{r} = \ddot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = (\quad)\ \mathbf{e}_\Theta,\ \ \mathbf{a} = (\quad)\ \mathbf{e}_r + (\quad)\ \mathbf{e}_\Theta$

예제 1.12 회전하는 암(arm)에서 미끄러지는 칼러(collar)의 운동 (p. 687)

예. (연습 1.162) (p. 694)

봉 OA의 O 주위의 진동은 Θ = (4/π)(sinπt)의 관계로 정의된다. 여기서 t와 Θ의 단위는 각각 s(초)와 rad이다. 칼러 B는 봉을 따라 미끄러지며 O로부터의 거리는 r = 10/(t+6) 이다. 여기서 r과 t의 단위는 각각 mm와 s(초)이다. t = 1 s 일 때, (a) 칼러의 속도, (b) 칼러의 총 가속도, (c) 봉에 대한 칼러의 상대가속도를 구하라.

$r(t) = \dfrac{10}{t+6}$ mm, $\Theta(t) = \dfrac{4}{\pi}\sin\pi t$ rad.



$r = \dfrac{10}{t+6} \qquad \dot{r} = -\dfrac{10}{(t+6)^2} \qquad \ddot{r} = \dfrac{20}{(t+6)^3}$

$\Theta = \dfrac{4}{\pi}sin\pi t \qquad \dot{\theta} = 4\cos\pi t \qquad \ddot{\theta} = -4\pi\sin\pi t$

t=1s, $r = \dfrac{10}{7}$ (mm) $\dot{r} = -\dfrac{10}{49}$ (mm/s) $\ddot{r} = \dfrac{20}{343}$ (mm/s^2)

$\Theta = 0$ (rad) $\dot{\theta} = -4$ (rad/s) $\ddot{\theta} = 0$ (rad/s^2)

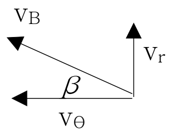
(a) $v_r = \dot{r} = -0.204$ mm/s, $v_\Theta = r\dot{\theta} = (1.43\text{ mm})(-4\text{ rad/s}) = -5.71$ mm/s

$\mathbf{v}_B = -0.204\ \mathbf{e}_r - 5.71\ \mathbf{e}_\Theta$ (mm/s)

또는

$v_B = (v_r^2 + v_\Theta^2)^{1/2} = [(-0.204)^2+(-5.71)^2]^{1/2} = 5.72$ (mm/s)

$\beta = \tan^{-1}\dfrac{0.204}{5.72} = 2.0°$ $\mathbf{v}_B$ =



(b) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (0.0583\text{ mm/s}^2) - (1.43\text{ mm})(-4\text{ rad/s})^2 = -22.8\text{ mm/s}^2$

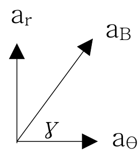
$a_\Theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1.43\text{ mm})(0\text{ rad/s}^2) + 2(-0.204\text{ mm/s})(-4\text{ rad/s}) = 1.63\text{ mm/s}^2$

$\mathbf{a}_B = -22.8\ \mathbf{e}_r + 1.63\ \mathbf{e}_\Theta$ (mm/s^2)

또는

$a_B = (a_r^2 + a_\Theta^2)^{1/2} = [(-22.8)^2+(1.63)^2]^{1/2} = 22.9$ (mm/s^2)

$\gamma = \tan^{-1}\dfrac{22.8}{1.63} = 85.9°$ $\mathbf{a}_B$ =



(c) $a_{B/OA} = \ddot{r} = 0.0583\text{ mm/s}^2$

$\mathbf{a}_{B/OA} = 0.0583\ \mathbf{e}_r$ (mm/s^2) =

<u>공간에서 질점의 운동</u> [extension to the motion of a particle in space] (p. 685)

: 원통좌표[cylindrical coordinates] 표현

위치벡터 : $\mathbf{r} = R\ \mathbf{e}_r + z\ \mathbf{k}$

속 도 : $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\ \mathbf{e}_r + R\dot{\theta}\ \mathbf{e}_\Theta + \dot{z}\ \mathbf{k}$

가속도 : $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\ \mathbf{e}_r + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\ \mathbf{e}_\Theta + \ddot{z}\ \mathbf{k}$