# 제3장 일반 강제응답 [General Forced Response] p.228

## (1자유도계의 강제진동)

중첩[superposition]의 원리

| input | | | output |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | → | → | $x_1$ |
| $f_2$ | → 선형시스템 | → | $x_2$ |
| $a_1 f_1$ | → $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x}$ | → | |
| $a_2 f_2$ | → $+ \omega_n^2 x = f$ | → | |
| $a_1 f_1 + a_2 f_2$ | → | → | |

예:

가진력 분류

확정적[deterministic] 가진 : 시간의 함수로 표현 가능

주기력 :

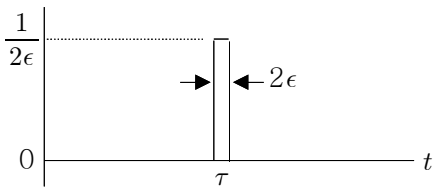
비주기력 :

불규칙[random] 가진 : 시간에 대한 예측 불가능,

## 3.1 충격하중 응답 [impulse response (function)] p.229

Dirac 델타 함수 (단위 임펄스), $\delta(t)$

$$\begin{cases} \delta(t-\tau) = 0 & (t \neq \tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\, dt = 1 \end{cases}$$




충격하중, $\hat{F}\,\delta(t)$

$$\begin{cases} \hat{F}\,\delta(t-\tau) = 0 & (t \neq \tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}\,\delta(t-\tau)\, dt = \hat{F} \end{cases}$$

그림 3.1

: 충격량 =

$F(t) = \hat{F}\,\delta(t)$ : 충격력 =

예 :

충격하중에 대한 응답, $x(t)$ 예:

(i) $\tau = 0$ 에서 작용하는 충격력 $\hat{F}\,\delta(t)$ 에 대한 응답

$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \hat{F}\,\delta(t)$ → 3.4절 (라플라스) 변환법

↓ 충격력을 초기조건으로 변환 (충격직전 $t = 0-$, 충격직후 $t = 0+$)

변위 : $x(0-) =$ , $x(0+) =$

속도 : $\dot{x}(0-) =$ , $\dot{x}(0+) =$

충격량 = → $\hat{F} = m\dot{x}(0+) - m\dot{x}(0-) = m\dot{x}(0+)$

⇒ $\dot{x}(0+) =$

$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) =$ , $x(0) =$ , $\dot{x}(0) =$

해 [solution] (연습 3.7)

$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$

$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi)$

$\dot{x}(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ [-\zeta\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)]$

$x(0) = A\ \sin\phi = 0\ ,\quad (A \neq 0) \Rightarrow \quad \sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi =$

$\dot{x}(0) = A\ [-\zeta\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi] = \dfrac{\hat{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad A =$

$x(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\,\omega_d}\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin\omega_d t \quad (t \geq 0)$ 그림 3.3(a) 실선 p.235

예제 3.1.1 충격하중 응답

예제 3.1.2 외팔보 끝 질량체에 충격 p.234

(ii) 단위 충격하중($\hat{F} = 1$)에 대한 응답, $h(t)$ '3.2절 임의의 가진에 대한 응답'에 활용

$h(t) = \dfrac{1}{m\,\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin\omega_d t \quad (t \geq$

: $t = 0$ 인 순간에 가해진 단위 충격하중에 대한 응답

$h(t-\tau) = \dfrac{1}{m\,\omega_d} e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)}\ \sin\omega_d (t-\tau) \quad (t \geq$

: $t = \tau$ 인 순간에 가해진 단위 충격하중에 대한 응답

$x(t) = \hat{F}\,h(t-\tau)$ → 3.2절

(iii) 두 개 이상의 충격하중에 의한 응답 [예제 3.1.3] 그림 3.3(b) p.235

$F_1(t) = 0.2\ \delta(t) \quad \rightarrow \quad x_1(t) = \quad (t \geq 0)$

$F_2(t) = 0.1\ \delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x_2(t) = \quad (t \geq \tau)$

$F_1(t) + F_2(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$ $\begin{cases} & (0 \leq t < \tau) \\ & (t \geq \tau) \end{cases}$

(중첩)

$\tau = 0.5$ s 일 때 그림 3.3(a) 점선

$x(t) = 0.2\ h(t) + 0.1\ h(t-\tau)\ \Phi(t-\tau)$

$\Phi(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$ Heaviside step function

예제 3.1.4 초기조건 + 두 충격하중 (생략 ∵ 나쁜 문제) p.236

연습

## 3.2 임의의 가진에 대한 응답 [response to an arbitrary input] p.238

임의의 가진 [arbitrary excitation]

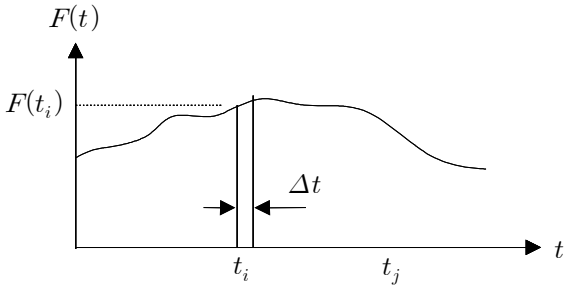



그림 3.5

단위 충격하중

단위 충격하중 응답

임의 가진 응답

1. 가진력을 미소 충격량으로 나누어, 각각의 충격량에 대한 응답을 구함

$\Delta x(t_i) =$ ← $\Delta x(\tau) = \hat{F}(\tau)\ h(t-\tau)$

2. 각각의 응답을 더해서 전체 응답을 계산함 (

$$x(t_j) = \sum_{i=0}^{j} \Delta x(t_i) = \sum_{i=0}^{j}$$

3. 여기에 $\lim_{\Delta t \to 0}$ 을 취함 ⇒ $(t_j \to t,\ \ t_i \to \tau)$

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$$

: 합성곱[convolution integral] (길잡이 공업수학 4-5절)

$$h(\tau) = \frac{1}{m\,\omega_d} e^{-\zeta\omega_n \tau} \sin\omega_d \tau \qquad h(t-\tau) = \frac{1}{m\,\omega_d} e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau)$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n \tau} \sin\omega_d \tau\, d\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

계단함수 하중 응답 [step response] [예제 3.2.1]

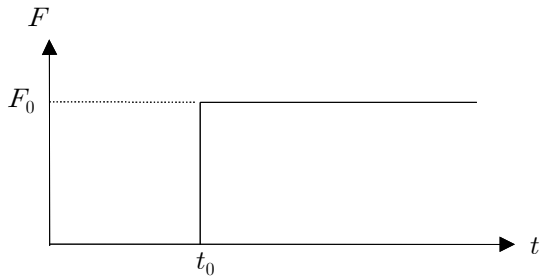



그림 3.6 p.241

예 :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ F_0 & (t > t_0) \end{cases} \qquad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

(i) $t_0 = 0$ 이고 비감쇠계($\zeta$=0) 이면 예:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F_0 \sin\omega_n \tau\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n}\left[\frac{-1}{\omega_n}\cos\omega_n \tau\right]_0^t = \frac{-F_0}{m\omega_n^2}(\cos\omega_n t - 1)$$

=

(ii) $t_0 = 0$ 이고 감쇠계(0<ζ<1) 이면

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F_0\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau$$

(교재에서는 p.241

$$\mathrm{I} = \int_0^t e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau = \left[\frac{-1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n\tau}\cos\omega_d\tau\right]_0^t - \int_0^t \frac{-1}{\omega_d}(-\zeta\omega_n)e^{-\zeta\omega_n\tau}\cos\omega_d\tau\, d\tau$$

$$= \frac{-1}{\omega_d}\left(e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - 1\right) - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\left\{\left[\frac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\right]_0^t - \int_0^t \frac{-\zeta\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{\omega_d}\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t\right) - \frac{\zeta^2\omega_n^2}{\omega_d^2}\,\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} + \frac{\zeta^2\omega_n^2}{\omega_d^2}\,\mathrm{I} = \left(1 + \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}\right)\mathrm{I} = \frac{1}{1-\zeta^2}\,\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1-\zeta^2}{\omega_d}\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\,\mathrm{I} = \frac{F_0(1-\zeta^2)}{m\omega_d^2}\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t\right)$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t + \zeta\sin\omega_d t\right)\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \phi)\right] \qquad (t \ge 0), \qquad \phi =$$

$\cos\phi =$

그림 3.7 (실습 4) p.242

예.

정상상태 응답 (steady-state response), $t \to \infty$

$x_{ss}(t) =$

오버슛[overshoot] O.S. = (연습 3.26)

상승시간[rising time] $t_r = \frac{1}{\omega_d}\left(\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$

정점시간[peak time] $t_p =$ (연습 3.25)

정착시간[settling time] $t_s \approx$ (본문)

과도감쇠계(ζ>1)이면?

$F(\tau) = F_0 \qquad 0 < \tau < t$

$F(t-\tau) = F_0 \quad 0< t-\tau < t \qquad \Rightarrow \qquad < -\tau < \qquad \Rightarrow \qquad > \tau >$

(iii) $t_0 > 0$ 이고 감쇠계(0<ζ<1) 이면

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau$$

$F(\tau) = F_0 \qquad t_0 < \tau < t$

$F(t-\tau) = F_0 \quad t_0 < t-\tau < t \quad \Rightarrow \qquad < -\tau < \qquad \Rightarrow \qquad > \tau >$

$$= \frac{1}{m\omega_d}\int_0^{t-t_0} F_0\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^{t-t_0} e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau$$

$$= \ \ldots$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}\left(\cos\omega_d(t-t_0) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d(t-t_0)\right)\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\} \qquad (t \geq t_0), \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

그림 3.7

[예제 3.2.2] 사각형 함수 가진, $F(t) = F_0 \qquad (0 < t < t_1)$ 그림 3.8 p.243

교재의 방법 $F_1(t) = F_0 \qquad (t > 0), \qquad F_2(t) = -F_0 \qquad (t > t_1)$

$F(t) = F_1(t) + F_2(t)$

$0 < t < t_1 \qquad x(t) = x_1(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \phi)\right]$

$t > t_1 \qquad x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \cdots =$ 교재의 답

다른 방법 $F(\tau) = F_0 \qquad (0 < \tau < t_1)$

$F(t-\tau) = F_0 \quad 0 < t-\tau < t_1 \ \Rightarrow \ -t < -\tau < t_1 - t \ \Rightarrow \qquad > \tau >$

$0 < t < t_1 \qquad x(t) = x_1(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \phi)\right]$

$t > t_1 \qquad x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_{t-t_1}^{t} F_0\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau = \cdots =$ 교재의 답

또는 $x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^{t_1} F_0\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau = \cdots =$ 교재의 답

그림 3.9 cf.

예제 3.2.3 덤프 트럭 적재함 그림 3.10 p.244

연습

## 3.3 주기적 가진에 대한 응답[response to an arbitrary periodic input]

예 : p.247

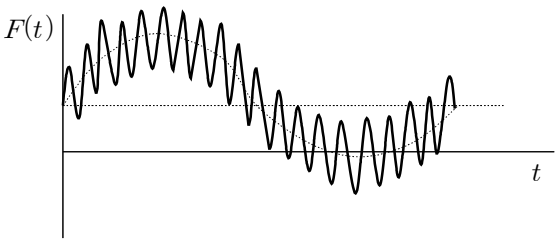
주기적 가진

1. 임의의 가진(3.2절)의 특별한 경우로 취급

응답 ⇒ 임의의 가진에 대한 응답으로 구할 수도 있다.

2. 몇 가지 조화가진의 합으로 취급

응답 ⇒




$= F_1(t) \quad + F_2(t) \quad + F_3(t)$

푸리에 급수 [Fourier series] ← 주기적 가진

주기 $T$인 주기함수 $F(t)$는 무한급수로 표시 가능 그림 3.11 p.247

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t) \qquad \omega_T =$$

$a_0, a_n, b_n$ : Fourier 계수

$$a_0 \; ; \quad \int_0^T F(t)\,dt = \int_0^T (\text{Fourier series})\,dt \qquad \text{(연습 3.30)}$$

$$= \int_0^T \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\left(\int_0^T \cos m\omega_T t\,dt\right) + b_m\left(\int_0^T \sin m\omega_T t\,dt\right)\right]$$

$$= \frac{a_0 T}{2} + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt$$

---

삼각함수의 직교성[orthogonality]

벡터의 직교성 : $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ⇒

함수의 직교성 : $f(t),\ g(t)$ $\int f(t)g(t)\,dt$

$$\int_0^T \sin n\omega_T t \sin m\omega_T t\,dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{T}{2} & (m = n) \end{cases} \qquad \text{(연습 3.30)}$$

$$\int_0^T \cos n\omega_T t \cos m\omega_T t\,dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos n\omega_T t \sin m\omega_T t\,dt = 0 \qquad (m,\ n \text{ 은 정수})$$

$$a_n \;;\quad \int_0^T F(t)\,\cos n\omega_T t\,dt \;=\; \int_0^T (\text{Fourier series})\,\cos n\omega_T t\,dt \;=\; \frac{a_0}{2}\int_0^T \cos n\omega_T t\,dt$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\left(\int_0^T \cos m\omega_T t\,\cos n\omega_T t\,dt\right) + b_m\left(\int_0^T \sin m\omega_T t\,\cos n\omega_T t\,dt\right)\right]$$

$$= \quad 0 \quad + \quad a_n\frac{T}{2} \quad + \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,\cos n\omega_T t\,dt \qquad (n \;=\; 1,\; 2,\; \cdots)$$

$$b_n \;;\quad \int_0^T F(t)\,\sin n\omega_T t\,dt \;=\; \int_0^T (\text{Fourier series})\,\sin n\omega_T t\,dt \;=\; \frac{a_0}{2}\int_0^T \sin n\omega_T t\,dt$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\left(\int_0^T \cos m\omega_T t\,\sin n\omega_T t\,dt\right) + b_m\left(\int_0^T \sin m\omega_T t\,\sin n\omega_T t\,dt\right)\right]$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad b_n\frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b_n \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,\sin n\omega_T t\,dt \qquad (n \;=\; 1,\; 2,\; \cdots)$$

톱니파 : (연습 3.33) p.305

$$F(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}t \;\;(\text{N}) \qquad (0 \le t \le 2\pi) \qquad T = \quad , \quad \omega_T =$$

$$a_0 \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt \;=\; \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t\right)dt \;=\; \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi} =$$

$$a_n \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,\cos n\omega_T t\,dt \;=\; \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t\right)\cos nt\,dt \;=\; \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} t\cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n}t\,\sin nt\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nt\,dt\right\} = \frac{1}{2\pi^2}\left\{0 + \left[\frac{1}{n^2}\cos nt\right]_0^{2\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi^2 n^2}[1-1] =$$

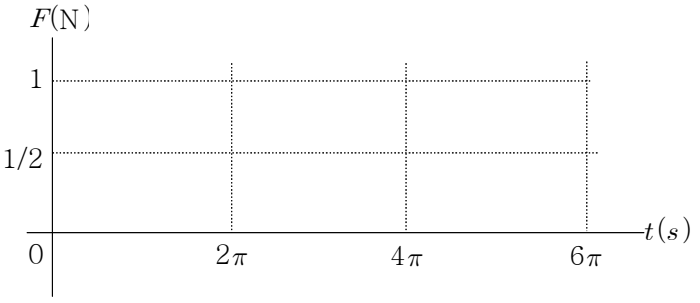
$$b_n \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,\sin n\omega_T t\,dt \;=\; \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t\right)\sin nt\,dt \;=\; \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} t\,\sin nt\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{-1}{n}t\cos nt\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{-1}{n}\cos nt\,dt\right\} = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{-(2\pi-0)}{n} + \left[\frac{1}{n^2}\sin nt\right]_0^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{-2\pi}{n} + \frac{1}{n^2}(0-0)\right] =$$

$$F(t) \;=\; \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n\pi}\right)\sin nt \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\right) \quad (\text{N})$$



삼각파 : 그림 3.12 p.249

예제 3.3.1 $a_0 = 0,\ a_n = ?$ (연습 3.31) $b_n = 0$

$$F(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{-8}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{T}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{2(2n-1)\pi}{T}t$$

$$= -\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{9}\cos\frac{6\pi}{T}t + \frac{1}{25}\cos\frac{10\pi}{T}t + \cdots\right)$$ 그림 3.13 p.250

사각파 : (연습 3.32)

주기적 가진에 대한 응답

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_T t + b_n\sin n\omega_T t)$$

$$= F_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}[F_n^c(t) + F_n^s(t)]$$

정상상태 응답

$$x_p(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}[x_n^c(t) + x_n^s(t)]$$

$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = \frac{a_0}{2}$ : $\Rightarrow\ x_0(t) =$

$m\ddot{x}_n^c + c\dot{x}_n^c + kx_n^c = a_n\cos n\omega_T t$ :

$m\ddot{x}_n^s + c\dot{x}_n^s + kx_n^s = b_n\sin n\omega_T t$ :

$$\Rightarrow\ x_n^c(t) = \frac{a_n/m}{\sqrt{[\omega_n^2 - (n\omega_T)^2]^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2}}\cos(n\omega_T t - \theta_n)$$

$$x_n^s(t) = \frac{b_n/m}{\sqrt{[\omega_n^2 - (n\omega_T)^2]^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2}}\sin(n\omega_T t - \theta_n)$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n n\omega_T}{\omega_n^2 - (n\omega_T)^2}$$

과도 응답

$x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)$ $x_0(t)$ 중 transient part는

응답

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

예제 3.3.2 바닥가진 문제. 초기조건과 조화가진에 따른 응답 (재고찰) p.252

$F(t) = a_1\cos\omega_b t + b_1\sin\omega_b t$ $a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = 0$ ($n > 1$ 일 때)

정상상태 응답 $x_p(t) = x_1^c(t) + x_1^s(t)$

응답 $x(t)$ 그림 3.14 p.254

연습

## 3.4 변환법 [transform methods] p.254

: 라플라스 변환[Laplace transform]

시스템의 강제응답 계산에 유용 (주기적 가진력, 임의의 가진력)

미분방정식 계산 ⇒

라플라스 변환

함수 $f(t)$ 영역 : 양의 실직선 $(t>0)$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\ e^{-st}\,dt \qquad \text{영역 : 복소평면 } s \qquad (3.41)$$

$f(t) = L^{-1}[F(s)]$ : p.256

예제 3.4.1 도함수의 변환 (미분을 p.255

$$L[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

$$L[\ddot{x}(t)] = s^2\,X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)$$

1자유도 강제진동

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f(t) \quad \Rightarrow \quad L[\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x] = L[f(t)]$$

$$[s^2\,X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)] + 2\zeta\omega_n[s\,X(s) - x(0)] + \omega_n^2\,X(s) = F(s)$$

강제응답에만 관심이 있다면, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

⇒

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2} = \frac{F(s)}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

$$= \frac{F(s)}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)]$$

충격하중 응답 [예제 3.4.4] p.257

단위 충격하중 $f(t) = \frac{1}{m}\delta(t)$

$$F(s) = \frac{1}{m}L[\delta(t)] =$$

$$X(s) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{m\omega_d}\,\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

표3.1에서 5. $L^{-1}[\frac{\omega_d}{s^2 + \omega_d^2}] =$

3. $L^{-1}[\frac{1}{s+\zeta\omega_n}] =$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{1}{m\omega_d}\,\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}] = \frac{1}{m\omega_d}\ L^{-1}[\frac{1}{s+\zeta\omega_n}]\ L^{-1}[\frac{\omega_d}{s^2 + \omega_d^2}]$$

=

계단함수 하중 응답 [예제 3.4.2, 3.4.3, 연습 3.39] p.255

계단함수 $f(t) = \frac{F_0}{m} \quad (t > 0)$

$$F(s) = \frac{F_0}{m} L[1] = \frac{F_0}{m} \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \frac{1}{s} = \frac{F_0}{m}\left[\frac{a}{s} + \frac{bs+c}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right]$$

$$a\left[(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2\right] + (bs+c)s = 1$$

$$(a+b)\,s^2 + (2\zeta\omega_n a + c)\,s + (\zeta^2\,{\omega_n}^2 + {\omega_d}^2)\,a = 1$$

$$a + b = 0, \quad 2\zeta\omega_n a + c = 0, \quad (\zeta^2\,{\omega_n}^2 + {\omega_d}^2)\,a = 1$$

$$\Rightarrow \quad [\zeta^2\,{\omega_n}^2 + (1-\zeta^2)\,{\omega_n}^2]\,a = 1$$

$\Rightarrow \quad a = \qquad , \quad b = -a = \qquad , \quad c = -2\zeta\omega_n a =$

$$X(s) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right]$$

표3.1에서 2. $L^{-1}[\frac{1}{s}] =$

6. $L^{-1}[\frac{s}{s^2 + \omega_d^2}] =$ 5. $L^{-1}[\frac{\omega_d}{s^2 + \omega_d^2}] =$

3. $L^{-1}[\frac{1}{s+\zeta\omega_n}] =$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{F_0}{k}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\ \{\ L^{-1}[\frac{1}{s}] - L^{-1}[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}] - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ L^{-1}[\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}]\ \}$$

$$= \frac{F_0}{k}\ [\ 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t\ ]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t + \zeta\sin\omega_d t\right)\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)\right]$$

전달함수[transfer function] $H(s) =$

연습

## 3.5 불규칙 가진에 대한 응답 [response to random inputs] p.259

불규칙 진동 : 통계적 처리

## 3.6 충격 스펙트럼 [shock spectrum] p.267

'3.2 임의의 가진에 대한 응답'의 예

## 3.7 전달함수에 의한 측정 [measurement via transfer functions]

p.272

표 3.2 진동 측정에 사용되는 transfer function들

| 응답 측정 | transfer function | inverse transfer function |
|---|---|---|
| 가속도 | accelerance | apparent mass |
| 속도 | mobility | impedance |
| 변위 | receptance | dynamic stiffness |

## 3.8 안정성 [stability] p.274

## 3.9 응답의 수치모사 [numerical simulation of the response] p.279

(MATLAB 실습)

## 3.10 비선형 응답특성 [nonlinear response properties] p.291

# 제4장 다자유도 시스템 [Multi-DOF Systems] p.315

예 :

1자유도계 : 하나의 질점이 한 방향으로 운동하는 것

하나의 좌표와 하나의 2계 미분방정식으로 해석

1자유도 모델로는 충분치 않은 기계장치나 구조물 ⇒

2자유도계 : 다자유도계의 특성을 갖는 계 중에서 가장 간단한 계. 예 :

## 4.1 2자유도 모델 (비감쇠) [two-DOF model (undamped)] p.316

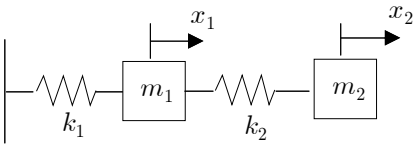



그림 4.1(a)

자유물체도(F.B.D.)

그림 4.2

① 운동방정식 유도

질량체 $m_1$과 $m_2$에 각각 Newton의 운동 제2법칙을 적용

$m_1 \ddot{x}_1 =$ ⇒ $m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$

$m_2 \ddot{x}_2 =$ (4.1) ⇒ $m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$ (4.2)

두 개의 연립 2계 상미분방정식

초기조건 $x_1(0) = x_{10},\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10},\quad x_2(0) = x_{20},\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$ (4.3)

(수학적) 각 식이 $x_1$과 $x_2$를 모두 포함, 즉

(물리적) $x_1$의 운동이 $x_2$의 운동에 영향을 미치고,

연립 미분 방정식은 그 자체만으로는 해를 구할 수

② 벡터와 행렬(matrix)을 이용하여 운동방정식을 표현,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

예제 4.1.1 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}$ 예제 4.1.2 $\mathbf{K}\mathbf{x}$ p.319 (4.8)(4.10)

응답 변위벡터 속도벡터 가속도벡터 vector =

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix},\quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix},\quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.4)(4.5)$$

질량행렬 (관성행렬) 강성행렬

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)(4.9)$$

대칭 행렬 ($A^{\mathrm{T}} = A$) 예제 4.1.3 p.321

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ $\qquad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (4.11)

초기조건 $\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix}$, $\qquad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix}$

③ 해의 형태

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}\, e^{\pm j\omega_n t}$ $\qquad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ $\qquad \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} e^{\pm j\omega_n t}$ (4.15)

운동방정식에 대입

$-\omega_n{}^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}\, e^{\pm j\omega_n t} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}\, e^{\pm j\omega_n t} = \mathbf{0}$

$(-\omega_n{}^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K})\,\mathbf{u}\, e^{\pm j\omega_n t} = \mathbf{0}$ (4.16)

$e^{\pm j\omega_n t} \neq 0$

$\Rightarrow \quad (-\omega_n{}^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (4.17)

$$\begin{bmatrix} -\omega_n^2 m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\omega_n^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

두 개의 식, 세 개의 미지수 (

④ 특성방정식 [characteristic equation]

0이 아닌 벡터 해 $\mathbf{u}$를 갖기 위해서 $(-\omega_n{}^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K})$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

예제 4.1.4 $A^{-1}$ p.322 (4.18)

행렬 $A$의 역행렬 $A^{-1}$ 이 존재하려면 → $A$의 행렬식 det $A$ =

(cf. a $x$ = b, b = 0 일 때

a≠0 이면 $x$ = 0, a = 0 이면 $x$ 는 부정)

$\det(-\omega_n{}^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$ (4.19)

$$= \det\begin{bmatrix} -\omega_n^2 m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\omega_n^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix}$$

$= (-\omega_n^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega_n^2 m_2 + k_2) - (-k_2)(-k_2) = 0$ (4.20)

$\Rightarrow \quad m_1 m_2 \omega_n^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\,\omega_n{}^2 + k_1 k_2 = 0$ (4.21)

시스템에 대한 특성방정식 = (5.3절에도 사용)

⑤ 고유값[eigenvalue, characteristic value]

: 선형 변환에 의해 회전하지 않는 벡터에서 크기의 배율

$\omega_n{}^2$에 대한 2차방정식의 근 $\omega_1{}^2,\ \omega_2{}^2$ ( $\omega_1{}^2 \leq \omega_2{}^2$ )

$\Rightarrow$ 네 개의 근 $\pm\omega_1,\ \pm\omega_2$

예제 4.1.5 $\omega$값 계산 p.323 (실습 vtb4_1)

⑥ 고유벡터[eigenvector]

: 선형 변환에 의해 회전하지 않는 벡터

$\omega_n{}^2 = \omega_1{}^2$ 일 때 : $(-\omega_1{}^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K})\,\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ (4.22) $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}$

$\omega_n{}^2 = \omega_2{}^2$ 일 때 : $(-\omega_2{}^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K})\,\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ (4.23) $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}$

예제 4.1.6 $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ 계산 p.324 상대값. 큰 수를 1로 정규화

연습 4.3

⑦ 자유응답

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_1 e^{j\omega_1 t},\ \mathbf{u}_1 e^{-j\omega_1 t},\ \mathbf{u}_2 e^{j\omega_2 t},\ \mathbf{u}_2 e^{-j\omega_2 t} \tag{4.24}$$

일반해는 이들의 1차결합

$$\mathbf{x}(t) = (a\ e^{j\omega_1 t} + b\ e^{-j\omega_1 t})\ \mathbf{u}_1 + (c\ e^{j\omega_2 t} + d\ e^{-j\omega_2 t})\ \mathbf{u}_2 \tag{4.25}$$

$$= (B_1 \sin\omega_1 t + C_1 \cos\omega_1 t)\ \mathbf{u}_1 + (B_2 \sin\omega_2 t + C_2 \cos\omega_2 t)\ \mathbf{u}_2$$

$$= A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\ \mathbf{u}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\ \mathbf{u}_2 \tag{4.26}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}$$

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\ u_{11} + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\ u_{12}$$

$$x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\ u_{21} + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\ u_{22}$$

미지 상수 $A_1$, $A_2$, $\phi_1$, $\phi_2$ 는 초기조건으로부터 결정

예제 4.1.7 초기조건을 적용하여 상수를 결정하고 해를 완성 그림 4.3 p.326
연습 4.4 p.426 (실습 vtb4_2)

고유진동수[natural frequency], 모드형상[mode shape]

각 질량은 두 진동수 $\omega_1$과 $\omega_2$로 진동 → 시스템의 고유진동수

고유진동모드

$A_2 = 0$ 이라면, 각 질량의 상대적 위치는 $u_{11}$과 $u_{21}$, 즉 $\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}$ 에 의해 결정

$\mathbf{u}_1$ → 시스템의 첫째 모드형상

$A_1 = 0$ 이라면, 각 질량의 상대적 위치는 $u_{12}$와 $u_{22}$, 즉 $\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}$ 에 의해 결정

$\mathbf{u}_2$ → 시스템의 둘째 모드형상

연습

## 4.2 고유치와 고유진동수 [eigenvalues and natural frequencies]

고유값문제 해법 p.330

## 4.3 모드해석 [modal analysis] p.344

연립 상미분방정식 -변환(transformation)→ 독립적 상미분방정식

(recall) 1자유도계를 공부하는 이유 : (강의노트 p.4)

1. 다자유도계 또는 연속계를 대상으로 하더라도 관심사가 단순한 경우가 있다.
   예. 자동차의 bouncing 운동.
2. 많은 다자유도계 및 연속계와 관련된 수학적 표현-연립미분방정식-은 (*모드해석*에 의해) 여러개의 독립적(비연립)인 미분방정식으로 변환될 수 있고, 각각의 미분방정식은 1자유도계의 운동방정식과 같은 형태이다.

## 4.4 다자유도 [more than two degrees of freedom] p.352

## 4.5 점성감쇠 시스템 [systems with viscous damping] p.368

## 4.6 강제응답의 모드해석 [modal analysis of the forced response]

p.374

## 4.7 라그랑지 방정식 [Lagrange's equations] p.381

에너지방법의 일종, 다분히 수학적

## 4.8 예 제 [examples] p.389

## 4.9 진동문제에서 고유치 계산법 [computational eigenvalue problems for vibration]

(MATLAB 실습) p.401

## 4.10 시간응답의 수치 시뮬레이션 [numerical simulation of the time response] p.419

(MATLAB 실습)

# 제5장 진동 억제 설계 [Design for Vibration Suppression]

p.447

진동 설계 = 계의 진동응답이 바람직한 유형으로 되도록 물리적 파라미터들을 조정하는 작업
진동 억제 ⇒ 부정적인 진동 (원하지 않는 진동)을

## 5.1 진동의 허용수준 [acceptable levels of vibration] p.448

변위 진폭, 속도 진폭, 가속도 진폭을
인체는 진동가속도 크기에 민감
구조물은 진동속도나 진동변위에 따라 손상

## 5.2 진동 절연 [vibration isolation] p.454

전달률(transmissibility ratio) $T.R. = \dfrac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = \sqrt{1+(2\zeta r)^2}\ \ \overline{X}$ (5.7)

2.4절 바닥가진[base excitation]

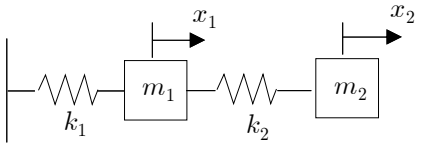
변위 전달률 $\dfrac{X_b}{Y}$ = (2.71)

2.5절 회전불균형[rotating unbanlance]

힘 전달률 $\dfrac{F_T}{F_0} = \dfrac{F_T}{m_0\, e\, \omega_r^2}$ =

사용 가능한 절연기 재질의 범위 내에서 $T.R.$값이 작도록 $\zeta$나 $r$의 값을 선택

## 5.3 (비감쇠) 진동 흡진기 [(undamped) vibration absorber] p.467




예 : 광학테이블 (그림 5.14) p.468

**(1) 2자유도 비감쇠계 자유진동** (4.1절 2자유도계)

운동방정식

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \qquad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - k_2x_1 + k_2x_2 = 0$$

특성방정식

$$m_1m_2\omega_n^4 - (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2)\omega_n^2 + k_1k_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n^4 - \left(\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)\omega_n^2 + \frac{(k_1+k_2)-k_2}{m_1}\frac{k_2}{m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n^4 - (\omega_{II}^2+\omega_I^2)\omega_n^2 + (\omega_I^2 - \frac{k_2}{m_1})\omega_{II}^2 = 0$$

$\omega_I = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}$ : $m_2$질점이 고정되어 있을 때

$\omega_{II} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$ : $m_1$질점이 " "

고유진동수 $\omega_n$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}\left[(\omega_I^2+\omega_{II}^2) \pm \sqrt{(\omega_I^2-\omega_{II}^2)^2 + \frac{4k_2}{m_1}\omega_{II}^2}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1,\ \omega_2$$

**(2) 2자유도 비감쇠계 강제진동**

질량 $m_1$인 질점에 조화가진력 $F_0\sin\omega t$가 가해질 때

운동방정식

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0\sin\omega t \qquad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - k_2x_1 + k_2x_2 = 0$$

(특수)해의 형태

$x_1(t) =$ $\qquad$ $x_2(t) =$

$$\Rightarrow \quad -m_1\omega^2X_1 + (k_1+k_2)X_1 - k_2X_2 = F_0\ , \quad -m_2\omega^2X_2 - k_2X_1 + k_2X_2 = 0$$

진폭

$$X_1 = \frac{F_0}{m_1}\frac{\omega_{II}^2-\omega^2}{(\omega_I^2-\omega^2)(\omega_{II}^2-\omega^2)-\frac{k_2}{m_1}\omega_{II}^2}\ , \quad X_2 = \frac{F_0}{m_1}\frac{\omega_{II}^2}{(\omega_I^2-\omega^2)(\omega_{II}^2-\omega^2)-\frac{k_2}{m_1}\omega_{II}^2}$$

$\omega_{II} = \omega$ 이면 $X_1 =$

외력이 가해지지 않는 질점의 고유진동수 $\omega_{II}$가 외력의 진동수 $\omega$와 일치하는 때에는

$X_1$이 0, 즉 외력이 가해지는 질점( )은 정지한다.

이는 감쇠기를 사용하지 않고 진동을 흡수하는 장치의 원리이다.

5.4 진동 흡진기에서의 감쇠 [damping in vibration absorber] p.475

5.5 최적화 [optimization] p.483

5.6 점탄성 감쇠 처리 [viscoelastic damping treatment] p.491

5.7 회전원판의 임계속도 [critical speed of rotating disks] p.497

# 제6장 분포 매개변수 시스템 [Distributed-Parameter Systems]

( 대학원 과정 ) p.514

연속계(continuous system) vs. 이산계 (discrete system)

분포매개변수계(distributed-parameter system) vs. 집중매개변수계(lumped-parameter system)

## 6.1 줄 또는 케이블의 진동 [vibration of a string or cable] p.516

현의 진동에 대한 운동방정식 $c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$ $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ (6.8)

경계조건 $w(0,t) = w(l,t) = 0$ (6.9)

초기조건 $w(x,0) = w_0, \quad \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0$

## 6.2 모드와 고유진동수 [modes and natural frequencies] p.520

## 6.3 막대의 진동 [vibration of rods and bars] p.531

## 6.4 비틀림 진동 [torsional vibration] p.537

## 6.5 보의 굽힘진동 [bending vibration of a beam] p.544

## 6.6 박막과 박판의 진동 [vibration of membranes and plates] p.556

## 6.7 감쇠 모델 [models of damping] p.562

## 6.8 강제진동응답을 위한 모드해석법 [modal analysis of the forced response] p.568

# 제7장 진동 실험 [Vibration Experiments] p.585

목 적 : 1. 해석에 필요한 계의 *파라미터* 측정 (계의 물리적 성질: ) 1.6절
2. 고유진동수 및 모드형상 계측 ⇒ 해석결과 검증, 7.1, 7.4, 7.6절
3. 시스템 진단 7.7절
4. 내구성 시험 7.7절

## 1.6 질량, 감쇠, 강성 측정 [measurement] p.70

질량 $m$ :
질량관성모멘트 $I_0$ : 동적 측정 그림 1.33

강성 $k$

(i) 정적 처짐 $k$ = (연습1.4)

(ii) 인장시험 $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ → $k$ =

(iii) 고유진동수 (또는 진동 주기) 측정 $k$ =

p.71

예제 1.6.1 외팔보 $L$ = 1 m, 단면2차모멘트 $I = 10^{-9}$ m$^4$, 질량 $m$ = 6 kg, 주기 $T$ = 0.62 s

고유진동수 $\omega_n = 2\pi f$ = $= \frac{2\pi \text{ rad}}{0.62 \text{ s}} = 10.13$ rad/s

강성 $k$ = $= (6 \text{ kg})(10.13 \text{ rad/s})^2 = 616 \text{ kg/s}^2 = 616$ N/m

( 탄성계수 $E$ = $= \frac{(616 \text{ N/m})(1 \text{ m})^3}{3(10^{-9} \text{ m}^4)} = 205\times10^9$ N/m$^2$ )

p.74

예제 1.6.3 질량 변화($\Delta m$)에 따른 고유진동수($\omega_1$, $\omega_2$) 측정에 의해 본래의 질량과 강성을 구함

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m+\Delta m}}$ ⇒

감쇠계수 $c$ :

부족감쇠계의 변위응답 기록 $x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi)$ 그림 1.35

대수감쇠율 (logarithmic decrement) : $\delta = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1+T)}$

$$= \ln\frac{A\ e^{-\zeta\omega_n t_1}}{A\ e^{-\zeta\omega_n (t_1+T)}} = \ln\ e^{\zeta\omega_n T} = \zeta\omega_n\ T = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} \quad \Rightarrow \quad c = 2\ \zeta\sqrt{mk}$$

평균 대수감쇠율 : 정확도 향상을 위하여

$$\delta = \frac{1}{n}(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) = \cdots = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t_1)}{x(t_{n+1})}$$ 연습 1.95

예제 1.6.2 $m$ = 2 kg, $k$ = 1.5×$10^3$ N/m, $x(t_1)$ = 9 mm, $x(t_2)$ = 1 mm, $c$ = ?

p.73

예 (연습 1.99) 단진자가 한 주기 동안 10 cm에서 1 cm로 감쇠한다. 감쇠비를 구하라.

$x_1$ = 10 cm, $x_2$ = 1 cm, $\zeta$ = ? p.123

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} =$$

$$\zeta = \qquad = \frac{2.303}{\sqrt{4\pi^2 + (2.303)^2}} = 0.344$$

$\zeta << 1$ 이면 $\delta \approx 2\pi\zeta$ $\Rightarrow$ $\zeta \approx$ ($\zeta < 0.25$ 일 때 사용) 3% 오차 (연습 1.100)

연습

## 2.6 측정기기 [measurement devices]



변환기(transducer) : 역학적 운동 ⇔ 전압

예 :

진동 센서 그림 2.24

센서가 부착된 바닥의 운동 $y(t) = Y\cos\omega_b t$

센서 내의 질량체의 운동 $x(t)$ :

바닥에 대한 질량체의 상대운동 $z(t) = x(t) - y(t)$ ⇒

운동방정식

$m\ddot{x} = -c(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y)$ ← $x - y = z$ $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$

⇒ $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega_b^2 Y\cos\omega_b t$ : 조화가진의 운동방정식

(표준형) $\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = \omega_b{}^2 Y\cos\omega_b t$

특수해 (가진응답)

$z_p(t) = Z\cos(\omega_b t - \theta)$

$$Z = \frac{\omega_b^2 Y}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_b^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega_b}{\omega_n^2-\omega_b^2} = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

진폭비 $\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ = 그림 2.27

(i) 진동변위계 (seismometer)

$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

$r >> 1$ (현실적으로 $r>3$) 일 때, $\frac{Z}{Y} \rightarrow$

$Z = Y$ :

(ii) 진동 가속도계 (accelerometer)

$\frac{1}{r^2}\frac{Z}{Y} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ (= 증폭률 $\overline{X}$ )

$r << 1$ (현실적으로 $r<0.2$) 일 때, $\frac{1}{r^2}\frac{Z}{Y} \rightarrow$

$Z = Y\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2} = \frac{\ddot{y}_{\max}}{\omega_n^2}$, $\omega_n$ 은 센서 내부의 고유진동수로서 상수.

⇒ $Z \propto \ddot{y}_{\max}$ :

일반적인 계측시스템 구성 (신체의 계측계 :

제1단계 :

피측정량을 검출하거나 감지, 역학적 입력을 아날로그 전기적 형태로 변환

원치않는 입력신호 : 잡음(noise) - 빨리 변화

표류(drift) - 천천히 변화

제2단계 :

변환된 전기신호를 증폭(amplifying), 여과(filtering), 적분, 미분

제3단계 :

인간의 감각 또는 제어기에 인식될 수 있는 형태로 변화된 정보 제공.

데이터를 저장.

예. 진동 계측 시스템

accelerometer (진동가속도계) pC/g (pico Coulomb per gravitational acceleration)

↓

charge amplifier mV/pC (milli volt per pico Coulomb)

↓

digital volt meter, oscilloscope, signal analyzer, computer

진동가속도 - (시간에 대해 적분) → 진동속도 - (시간에 대해 적분) → 진동변위

## 7.1 측정장비 [measurement hardware] p.587

실험 목적 2. 고유진동수 및 모드형상 계측 ⇒ 해석결과 검증, 해석 모델 향상

① 가 진 → | 시스템 (구조물) | → ② 응 답 그림 7.1

① 가 진

신호발생기 → 파워증폭기 → 가진기 → 힘변환기 ⇒ 조화함수 가진 :
signal generator power amp. exciter force transducer

충격햄머 → (파워공급기) → 힘변환기 ⇒ 임펄스 가진 :
impact hammer power supply force transducer

② 응 답

가속도계 → 전하증폭기 → 신호분석기 (시간 신호를 주파수 스펙트럼으로 변환)
accelerometer charge amp. signal analyzer (FFT; fast Fourier transform)

동적 스트레인 게이지 → indicator → 신호분석기
dynamic strain gauge

## 7.2 디지털 신호처리 [digital signal processing] p.591

( 생 략 )

## 7.3 랜덤신호해석 [random-signal analysis in testing] p.596

( 생 략 )

## 7.4 모드 데이터 추출 [modal data extraction] p.600

( 생 략 )

## 7.5 동심원 피팅에 의한 모델 매개변수 [modal parameters by circle fitting] p.603

( 생 략 )

## 7.6 모드 형상 측정 [mode shape measurement] p.608

( 생 략 )

## 7.7 내구성 및 시스템의 진단을 위한 진동시험 p.618

[vibration testing for endurance and diagnostics]

내구성 시험

: 반복 사용에 따른 제품의 성능을 실험적으로 예측

여러 환경에서 동하중(가진기 위에서 여러 시간 흔들어 줌)을 가한 후 성능 시험을 행함. 그림 7.16

예.

cf. 낙하충격시험 -

시스템 진단

: 기계장치나 구조물의 진단, 즉 이상 유무 감시

고유진동수와 감쇠비를 정기적으로 측정하여, 이들 값의 변화 양상으로부터 이상 유무나 파손 가능성 예측

예.

## 7.8 처짐진동형의 측정 [operational deflection shape measurement]

( 생 략 ) p.621

# 제8장 유한요소법 [Finite Element Method]

p.629

( 대학원 과정 )

복잡한 구조물이나 기계를 모델링하고 해를 구하는 수치해석 방법

연속계를 다자유도계로 이산화하여 운동방정식을 세우고 해를 구함

## 8.1 예 : 막대 [the bar]

## 8.2 3요소 막대 [three-element bar]

## 8.3 보 요소 [beam elements]

## 8.4 집중질량 행렬 [lumped-mass matrices]

## 8.5 트러스 [truss]

## 8.6 축소 모델 [model reduction]