

제2장 조화가진 응답 [Response to Harmonic Excitation]

(1자유도계의 강제진동)

p.129

계의 응답 = 주어진 가진에 의해 야기된 계의 운동

초기(t=0) 가진에 대한 응답 =

가진력(applied force)에 대한 응답 =

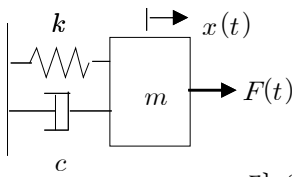
조화가진 : 하나의 진동수를 갖는 조화함수(sine, cosine)형태의 외력

예:

2.1 비감쇠계의 조화가진 [harmonic excitation of undamped systems]

운동방정식 (모델링)

감쇠계 → 2.2절



F.B.D.

p.131

그림 2.1

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) =$$

1자유도 감쇠계 강제진동의 운동방정식

비감쇠계 $c = 0$,

조화가진 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (또는

진동수 표기 ω_n : (비감쇠)고유진동수 [(undamped) natural frequency]

ω_d : 감쇠고유진동수 [damped natural frequency]

ω : 구동(가진)진동수 [driving frequency = input freq. = forcing freq.]

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = F_0 \cos \omega t$$

1자유도 비감쇠계 강제진동의 운동방정식

(2.2)

$$\Rightarrow \text{표준형} \quad \ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos \omega t \quad f_0 =$$

해 [solution]

일반해 (완전해) $x(t) =$ 제차해 $x_h(t) +$ 특수해 $x_p(t)$

$$x_h(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t = A \sin(\omega_n t + \phi) =$$

특수해 [particular solution]

$$x_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t \quad :$$

$$(-\omega^2 A_0 \cos \omega t - \omega^2 B_0 \sin \omega t) + \omega_n^2 (A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t) = f_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow (\omega_n^2 - \omega^2) A_0 \cos \omega t = (\omega_n^2 - \omega^2) B_0 \sin \omega t =$$

$$\cos \omega t (\neq 0) \text{를 소거} \quad A_0 = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (\text{일 때}), \quad B_0 =$$

$$\text{즉} \quad x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t = X \cos(\omega t - \theta) \quad X = \frac{f_0}{|\omega_n^2 - \omega^2|} :$$

$$\omega_n > \omega \text{ 일 때} \quad \theta = \quad , \quad \omega_n < \omega \text{ 일 때} \quad \theta =$$

전체응답[total response] (일반해[general solution] = 완전해[complete solution])

$$x(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (2.8)$$

$$= A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + X \cos(\omega t - \theta)$$

A_1, A_2 : 초기조건에서 결정되는 상수들 ! 초기조건을

$$\text{예. } x(0) = x_0 = \quad \Rightarrow \quad A_2 =$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \quad \Rightarrow \quad A_1 = \quad \Rightarrow (2.11) \quad \text{p.133}$$

식 (2.11)을 절대로

$$\text{그림 2.2} \quad (\text{실습 vtb2_1}) \quad \text{p.134}$$

예제 2.1.1 가진력의 크기가 23 N, 구동진동수가 고유진동수의 두 배, 초기조건이 $x_0 = 0$ m, $v_0 = 0.2$ m/s로 주어질 때, 식 (2.2)로 모델링되는 스프링-질량 시스템의 응답을 계산하여 그래프로 나타내어라. 시스템의 질량은 10 kg이고 스프링 상수는 1,000 N/m이다.

$$F_0 = 23 \text{ N}, \quad \omega = 2 \omega_n, \quad x_0 = 0 \text{ m}, \quad v_0 = 0.2 \text{ m/s}, \quad m = 10 \text{ kg}, \quad k = 1,000 \text{ N/m}$$

$$\omega_n < \omega \text{ 이므로 } \theta = \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = X \cos(\omega t - \pi) = -X \cos \omega t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1,000 \text{ N/m}}{10 \text{ kg}}} = 10 \text{ rad/s}, \quad \omega = 2 \omega_n =$$

$$f_0 = \quad = \frac{23 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 2.3 \text{ N/kg} = 2.3 \text{ m/s}^2$$

$$(2.8) \rightarrow x(t) = A_1 \sin 10t + A_2 \cos 10t - X \cos 20t$$

$$X = \quad = \frac{2.3 \text{ m/s}^2}{|10^2 - 20^2| \text{ rad}^2/\text{s}^2} = 7.667 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$x(0) = A_2 - X = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 =$$

$$\dot{x}(0) = (10 \text{ rad/s}) A_1 = 0.2 \text{ m/s} \Rightarrow A_1 =$$

$$\therefore x(t) = (0.02 \text{ m}) \sin 10t + (7.67 \times 10^{-3} \text{ m}) \cos 10t - (7.67 \times 10^{-3} \text{ m}) \cos 20t \\ = 0.02 \sin 10t + 7.67 \times 10^{-3} (\cos 10t - \cos 20t) \text{ m} \quad \text{그림 2.3} \quad \text{p.135}$$

예제 2.1.2 강성 2,000 N/m인 스프링에 연결되어 10 Hz (즉, 20π rad/s)에서 20 N의 조화력으로 가진되는 질량 m 의 강제진동을 생각해보자. 진동의 최대진폭은 0.1 m로 측정되었고, 운동은 정지상태 ($x_0 = v_0 = 0$)로부터 시작하는 것으로 가정한다. 이 시스템의 질량을 계산하여라.

$$k = 2,000 \text{ N/m}, \quad \omega = 20\pi \text{ rad/s}, \quad F_0 = 20 \text{ N}, \quad x_{\max} = 0.1 \text{ m}, \quad x_0 = v_0 = 0, \quad m = ?$$

$$x(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A_2 = \quad \quad \quad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A_1 =$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} (-\cos \omega_n t + \cos \omega t) = \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_n + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t$$

$$x_{\max} = \quad \Rightarrow \quad x_{\max} |\omega_n^2 - \omega^2| = 2f_0 \quad \Rightarrow \quad x_{\max} \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) = \pm \frac{2F_0}{m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{\omega^2 x_{\max}} (k x_{\max} \mp 2 F_0) = \frac{(2,000 \text{ N/m})(0.1 \text{ m}) \mp 2(20 \text{ N})}{(20\pi \text{ rad/s})^2 (0.1 \text{ m})} = 0.405, 0.608 \text{ kg}$$

맥놀이 [beat] $\omega \approx \omega_n, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_n + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t = 2X \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_n + \omega}{2}, \quad \omega_2 = \frac{|\omega_n - \omega|}{2}, \quad \text{맥놀이[beat] 진동수 } \omega_b =$$

$$\text{주기 } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi}{\omega_n + \omega}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{4\pi}{|\omega_n - \omega|}, \quad \text{맥놀이 주기 } T_b (= \frac{T_2}{2}) = \frac{2\pi}{\omega_b} = \frac{2\pi}{|\omega_n - \omega|}$$

$$\left| \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \right|$$

p.136

(실습 vtb2_1)

예. 조율 [tuning]:

소리굽쇠 $\rightarrow$ 기준 진동수 ω_n 의 소리 발생, 악기의 해당음 $\rightarrow$

$\omega \approx \omega_n$ 이지만 $\omega \neq \omega_n$ 일 때, 낮은 맥놀이 진동수

$\omega_b \rightarrow 0$, 즉 맥놀이 진동수가

musical scales (major)

C	D	E	F	G	A	B	C
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
f							$2f$
264Hz	297	330	352	396	440	495	528

공진 [resonance] $\omega = \omega_n$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \cos \omega t$$

$$x_p(t) = A_0 t \cos \omega t + B_0 t \sin \omega t \quad \text{cf. } x_h(t) =$$

$$\dot{x}_p = A_0 (\cos \omega t - \omega t \sin \omega t) + B_0 (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

$$\ddot{x}_p = A_0 (-2\omega \sin \omega t - \omega^2 t \cos \omega t) + B_0 (2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t)$$

$$[A_0 (-2\omega \sin \omega t - \omega^2 t \cos \omega t) + B_0 (2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t)]$$

$$+ \omega^2 [A_0 t \cos \omega t + B_0 t \sin \omega t] = f_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow A_0 = \quad, \quad B_0 =$$

$$x_p(t) =$$



그림 2.5

예.

p.137

ex. Tacoma Narrows Bridge

1940.8 개통 현수교[suspension bridge]

1940.11 붕괴

원인 : 바람에 의한 와류[vortex]의 진동수 =

$\Rightarrow$

$\rightarrow$ flow-induced vibration

예.

<예제 2.1.3> (생략)

연습

2.2 감쇠계의 조화가진 [harmonic excitation of damped systems]

예 :

p.142

조화가진에 대한 1자유도 감쇠계의 운동방정식 ← 2.1절

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \text{표준형} \quad \ddot{x}(t) + 2 \zeta \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos \omega t \quad f_0 =$$

해 [solution]

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad \text{cf. 비감쇠계} \quad x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \theta)$$

제차해 [homogeneous solution] (부족감쇠($0 < \zeta < 1$)의 경우)

$$x_h(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) =$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n, \quad A \text{와 } \phi \text{는 현재 미지수} \quad (\text{초기조건을}$$

특수해 [particular solution]

$$x_p(t) = A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t$$

$$\dot{x}_p(t) = -\omega A_s \sin \omega t + \omega B_s \cos \omega t, \quad \ddot{x}_p(t) = -\omega^2 A_s \cos \omega t - \omega^2 B_s \sin \omega t$$

$$(-\omega^2 A_s \cos \omega t - \omega^2 B_s \sin \omega t) + 2\zeta \omega_n (-\omega A_s \sin \omega t + \omega B_s \cos \omega t)$$

$$+ \omega_n^2 (A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t) = f_0 \cos \omega t$$

$$(-\omega^2 A_s + 2\zeta \omega_n \omega B_s + \omega_n^2 A_s) \cos \omega t + (-\omega^2 B_s - 2\zeta \omega_n \omega A_s + \omega_n^2 B_s) \sin \omega t = f_0 \cos \omega t$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2) A_s + 2\zeta \omega_n \omega B_s = f_0, \quad -2\zeta \omega_n \omega A_s + (\omega_n^2 - \omega^2) B_s = 0 \quad (2.34)$$

2원 연립방정식의 해

$$A_s = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}, \quad B_s = \frac{2\zeta \omega_n \omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}$$

$$x_p(t) = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2} \cos \omega t + \frac{2\zeta \omega_n \omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2} \sin \omega t$$

다른 형태로 변환

$$x_p(t) = A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t$$

$$= X \cos(\omega t - \theta) = X \cos \theta \cos \omega t + X \sin \theta \sin \omega t$$

$$X^2 = A_s^2 + B_s^2 = \left[\frac{(\omega_n^2 - \omega^2) f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2} \right]^2 + \left[\frac{2\zeta \omega_n \omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2} \right]^2$$

$$= \frac{f_0^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2} \Rightarrow X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}} :$$

$$\tan \theta = \frac{B_s}{A_s} = \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} :$$

전체 응답 [total response] (일반해 [general solution] = 완전해 [complete solution])

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + X \cos(\omega t - \theta) \quad (2.37)$$

A, ϕ : 초기조건에서 결정되는 상수들 (자유진동의 상수와 다름!) → (연습2.20)

$x_h(t)$:

(실습 vtb2_2)

$x_p(t)$:

그림 2.34

p.198

예제 2.2.2 초기조건에 따른 전체 응답

p.147

예제 2.2.3 A 와 ϕ 를 결정하고, 자유진동에 대한 A 와 ϕ 값과 비교

p.148

정상상태응답의 진폭과 위상 vs. 진동수

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}} = \frac{f_0}{\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

진동수(주파수) 비[ratio] $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ (

$$\bar{X} \equiv \frac{X}{f_0/\omega_n^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} :$$

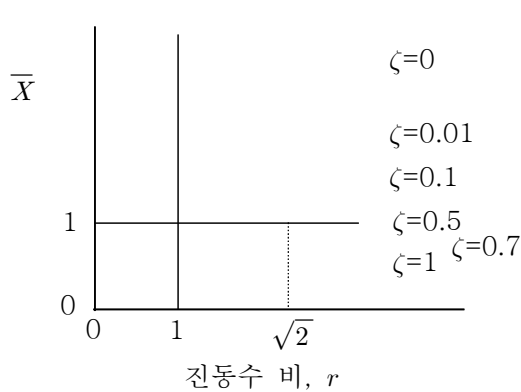
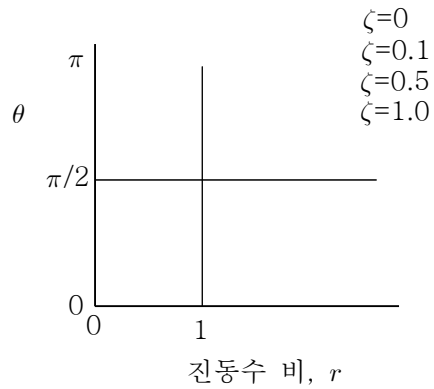


그림 2.8

(a)

(실습 vtb2_3)



(b)

p.151

(그림 2.9는 그림 2.8(a)의 세로축을 Log눈금으로 바꾼 것)

의미 : 1. 감쇠가 없을 때 ($\zeta=0$), $r = 1$ 에서 불연속이다:

2. 감쇠는

3.

4.

5. 진동수 비

6.

예제 2.2.4 단순 스프링-질량 계에서, 구동진동수 ω 변화에 따른 진폭 변화 p.149

예제 2.2.5 응답의 크기가 최대가 되는 r p.154

$$f(r) = [(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{-1/2}$$

$$f'(r) = -\frac{1}{2} [(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{-3/2} [2(1-r^2)(-2r) + 2(2\zeta r)(2\zeta)]$$

$$= -\frac{2r(r^2 - 1 + 2\zeta^2)}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{3/2}} = 0$$

$$r_{peak} =$$

$$0 < \zeta < 0.707 \quad r_{peak} < 1 \quad \text{피크진동수 } \omega_p =$$

$$\zeta > 0.707 \quad r_{peak} = 0$$

$$f(r_{peak}) = \{[1-(1-2\zeta^2)]^2 + 2^2\zeta^2(1-2\zeta^2)\}^{-1/2} = [4\zeta^2(1-\zeta^2)]^{-1/2} =$$

$\zeta < 0.1$ 이면 $r \approx 1$, 즉 피크진동수 ω_p 를

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \text{ 일 때, } x_p(t) =$$

비선형 강성의 경우. 예:

연습

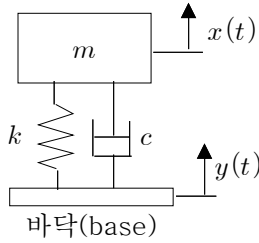
2.3 다른 표현들 [alternative representations] p.156

(2.5절 다음)

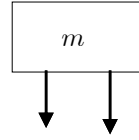
2.4 바닥가진 [base excitation]

p.163

예 :



F. B. D.



운동방정식

뉴턴의 운동 제2법칙 $\Rightarrow$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = c \dot{y} + ky$$

바닥이 조화함수 형태로 운동한다면 $y(t) = Y \sin \omega_b t$,

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = c \omega_b Y \cos \omega_b t + k Y \sin \omega_b t$$

표준형태로 전환

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 2\zeta \omega_n \omega_b Y \cos \omega_b t + \omega_n^2 Y \sin \omega_b t =$$

해 [solution]

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x &= f_0 \cos \omega t \text{ 의 특수해 } x_p(t) = X \cos(\omega t - \theta) \\ \ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x &= f_0 \sin \omega t \text{ 의 특수해 } x_p(t) = X \sin(\omega t - \theta) \\ X &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + x_p^{(1)}(t) + x_p^{(2)}(t)$$

$x_p^{(1)}(t)$: 가진 입력 $F_1 (= c \omega_b Y)$ 의 특수해

$x_p^{(2)}(t)$: 가진 입력 $F_2 (= k Y)$ 의 특수해

$$x_p^{(1)}(t) = \frac{2\zeta \omega_n \omega_b Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega_b)^2}} \cos(\omega_b t - \theta_b) \quad \theta_b = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega_n \omega_b}{\omega_n^2 - \omega_b^2}$$

$$x_p^{(2)}(t) = \frac{\omega_n^2 Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega_b)^2}} \sin(\omega_b t - \theta_b) =$$

특수해 (

$$x_p(t) = x_p^{(1)}(t) + x_p^{(2)}(t)$$

$$= \frac{2\zeta \omega_n \omega_b Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega_b)^2}} \cos(\omega_b t - \theta_b) + \frac{\omega_n^2 Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega_b)^2}} \sin(\omega_b t - \theta_b)$$

$$= X_b \cos \phi \cos(\omega_b t - \theta_b) + X_b \sin \phi \sin(\omega_b t - \theta_b)$$

$$= X_b \cos(\omega_b t - \theta_b - \phi)$$

특수해의 크기 (응답 변위 진폭)

$$X_b = Y \frac{\omega_n \sqrt{\omega_n^2 + (2\zeta \omega_b)^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega_b)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n}{2\zeta \omega_b} = \tan^{-1} \frac{1}{2\zeta r}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} 2\zeta r$$

$$= Y \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.70)$$

진동수 비 $r =$

<연습 2.48> 유도

변위 전달률 (displacement transmissibility) (= 응답 변위 진폭/가진 변위 진폭 비)

$$\frac{X_b}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = \sqrt{1+(2\zeta r)^2} \bar{X}$$

바닥으로부터의 운동이 질량으로 얼마나 전달이 되는가를 진동수비의 함수로 나타냄.

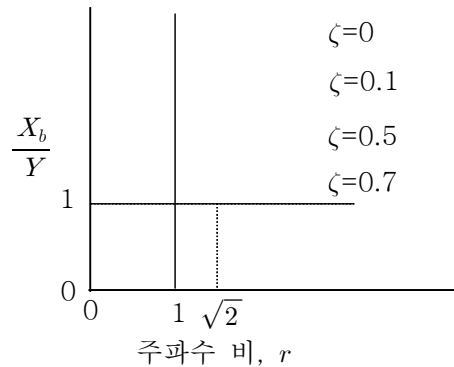


그림 2.14

p.166

의미 : $r = 1$ 일 때
 $r < \sqrt{2}$ 일 때
 $r > \sqrt{2}$ 일 때

예 :

예제 2.4.2 거친 도로 주행 자동차

그림 2.17

p.169

전달되는 힘 (transmitted force)

p.167

그림 2.13의 경우

$$\begin{aligned} \text{힘 } F_{tr}(t) &= k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) \\ &= \\ &= m \omega_b^2 X_b \cos(\omega_b t - \theta_b - \phi) = \cos(\omega_b t - \theta_b - \phi) \end{aligned}$$

힘의 크기

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{k}{\omega_n^2} \omega_b^2 X_b = k r^2 X_b = k Y r^2 \frac{X_b}{Y} \\ &= k Y r^2 \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \end{aligned}$$

cf. 연습 2.50

예제 2.4.1 변위 전달률, 힘 전달률

p.168

$$\text{교재 답 오류} \quad \frac{X}{Y} = 0.557 \rightarrow 1.245, \quad \frac{F_T}{kY} = 1.003 \rightarrow 2.24$$

예제 2.4.3 프레스 바닥에서 전달되는 힘

그림 2.18

p.171

예.<연습 2.47> 무게가 1800 N인 기계가 마루에 놓여 있다. 마루는 기계의 무게에 의해 약 4 cm 변형이 생긴다. 근처에 있는 기계의 운동 때문에 마루는 어느 정도 탄력적으로 공진($r=1$) 근처에서 0.2 cm의 진폭으로 조화운동을 한다. 감쇠비가 $\zeta=0.01$ 인 것으로 가정하고 전달되는 힘과 전달되는 변위의 크기를 계산하여라.

$$mg = 1,800 \text{ N}, \quad \delta = 0.04 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1,800 \text{ N}}{0.04 \text{ m}} = 45,000 \text{ N/m}$$

$$Y = 0.002 \text{ m} \quad \text{at} \quad r = 1, \quad \zeta = 0.01$$

$$\frac{X_b}{Y} =$$

$$\text{전달되는 변위의 크기 :} \quad X_b = (0.002 \text{ m}) (50.01) = 0.1000 \text{ m} = 10.00 \text{ cm}$$

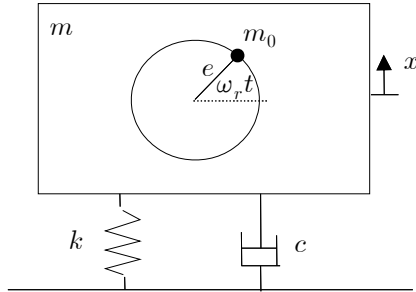
$$\begin{aligned} \text{전달되는 힘의 크기 :} \quad F_T &= (45,000 \text{ N/m})(0.002 \text{ m})(1)^2 (50.01) \\ &= 4,500 \text{ N} = 4.50 \text{ kN} \end{aligned}$$

연습

2.5 회전 불균형 [rotating unbalance]

p.172

: 회전체에서 불균일하게 분포된 질량
진동을 일으키는 대표적인 원인.
예 :



편심 질량 :
중심부터의 거리 :
회전수 (rpm) :

그림 2.19

기계의 회전 진동수 $f_r =$, $\omega_r = 2\pi f_r =$
편심 질량 m_0 의 상대운동 변위 중 x 방향 성분 $x_r =$

운동방정식

$$\begin{aligned} \text{뉴턴의 제2법칙} \quad -kx - c\dot{x} &= (m - m_0)\ddot{x} + \\ &= m\ddot{x} - m_0\ddot{x} + m_0\ddot{x} - m_0e\omega_r^2 \sin\omega_r t \\ \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= m_0e\omega_r^2 \sin\omega_r t \quad : \text{회전불균형 진동 운동방정식} \\ (= & \\ \text{표준형태로 변환} & \\ \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x &= \frac{m_0e}{m}\omega_r^2 \sin\omega_r t \end{aligned}$$

해 [solution]

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x &= f_0 \sin\omega t \text{ 의 특수해} \\ x_p(t) &= X \sin(\omega t - \theta) \\ X &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

$$x_p(t) = X_r \sin(\omega_r t - \theta_r)$$

$$X_r = \frac{m_0 e}{m} \frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_r^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_r)^2}} = \frac{m_0 e}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} :$$

$$\theta_r = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega_r}{\omega_n^2 - \omega_r^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2} :$$

$$\frac{m X_r}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} =$$

의미

그래프 $\frac{m X_r}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

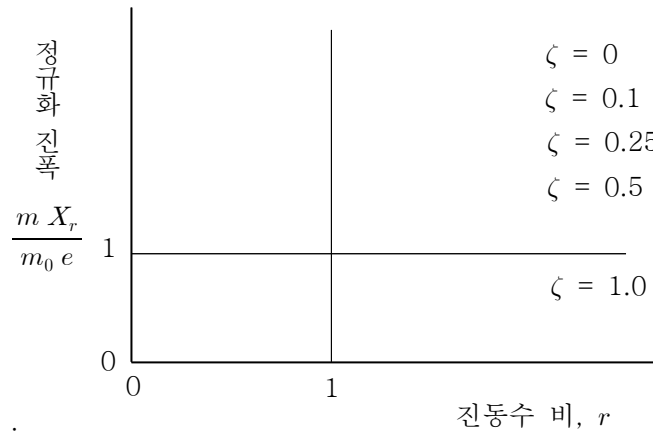


그림 2.21

p.174

의미 :

1. 회전 불균형으로 인한 진동의 증폭된 진폭을 감쇠로써 저감시킬 수 있다.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

예제 2.5.1 회전불균형의 질량과 회전반경

p.175

예제 2.5.2 헬리콥터 꼬리날개

p.176

p.220

예<연습 2.61> 선반(lathe)은 강철 테이블 위에 설치된 전기모터로 모델링 될 수 있다. 테이블과 모터의 질량의 합은 60 kg이다. 선반의 회전부는 중심으로부터 0.12 m의 거리에 4 kg의 불균형 질량을 가진다. 시스템의 감쇠비는 $\zeta = 0.06$ (점성감쇠)으로 측정되었고, 고유진동수는 7.5 Hz이다. $f_r = 30$ Hz 로 가정할 때, 모터의 정상상태 변위 진폭을 계산하라.

$$m = 60 \text{ kg}, \quad e = 0.12 \text{ m}, \quad m_0 = 4 \text{ kg}, \quad \zeta = 0.06, \quad f_n = 7.5 \text{ Hz}, \quad f_r = 30 \text{ Hz}$$

$$\text{진동수 비 } r = \frac{30}{7.5} = 4.0$$

$$X_r = \frac{(4)(0.12 \text{ m})}{(60)} \frac{(4.0)^2}{\sqrt{[1 - (4.0)^2]^2 + [2(0.06)(4.0)]^2}} = 0.00853 \text{ m} =$$

전달되는 힘 (그림 2.19, 를 통해 전달될 때)

$$F_{tr}(t) = kx + c\dot{x} = kX_r \sin(\omega_r t - \theta_r) + c\omega_r X_r \cos(\omega_r t - \theta_r) = F_T \sin(\omega_r t - \theta_r + \phi)$$

$$\text{힘의 크기 } F_T = \sqrt{k^2 + (c\omega_r)^2} X_r = m \sqrt{\omega_n^4 + (2\zeta\omega_n\omega_r)^2} X_r = m\omega_n^2 \sqrt{1 + (2\zeta r)^2} X_r$$

$$= m\omega_n^2 \sqrt{1 + (2\zeta r)^2} \frac{m_0 e}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$= m_0 e \omega_r^2 \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$\text{힘 전달률 } \frac{F_T}{m_0 e \omega_r^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} =$$

연습

2.3 다른 표현들 [alternative representations]

p.156

조화가진 응답을 구하는 수학적 방법들

0. 미정계수법 : 운동방정식의 특수해가 가진함수와 같은 형태를 갖는다고 가정하고 출발

1. 도식적(기하학적) 방법 : 각 힘들을 벡터로 취급하여 해를 구함.

복잡한 문제에 적용할 수 없기 때문에 유용하지 않은 방법.

2. 주파수응답법 : 운동방정식의 해를 복소수함수로 다룸.

다자유도계의 복잡한 문제에 유용한 방법.

3. 변환법 : Laplace 변환을 적용.

다자유도계의 복잡한 문제에 유용한 방법. (3.4절에서 설명)

2.6 측정기기 [measurement devices]

p.178

(제7장으로 연기)

2.7 다른 형태의 감쇠 [other forms of damping]

p.182

(생 략)

2.8 수치계산과 설계 [Numerical Simulation and Design]

p.192

(MATLAB 실습)

2.9 비선형 응답 특성 [Nonlinear Response Properties]

p.200

(생 략)