기계진동학 [Mechanical Vibration]

2023학년도 제1학기

김 진 오 교수

교 재 : D. J. Inman, Engineering Vibration,
4th edition, Pearson, 2014.

내 용 :

제0장 기계진동학 개론

0.1 기계공학이란?

과학[science]　= 자연현상에 대한 체계적 지식

물리학(　　, 전자기학, …), 화학, …

= 객관적, 합리적 방법으로 자연(, 인간 또는 사회)현상을 이해하려는 학문

공학[engineering]= 과학의 원리를 이용하여 인간의 생활에 도움이 되도록 하는 학문 (목적)

= 과학에 의한　　[design] 및　　[production]과 장치운용을 다루는 학문 (방법)

<u>기계공학</u> [mechanical engineering]　≠

↑

mechanics (역학) : 유체역학, 고체역학, 동역학

Newton의 법칙　1.관성, 2.가속도, 3.작용/반작용, *.만유인력

매 질			상 태	
이 름		특 성	정적 static	동적 dynamic
고체 solid		부피 일정 형상 일정	정역학　statics **고체역학** solid mechanics	**동역학** dynamics
액체 liquid	유체 fluid	형상 부정	**유체역학** fluid mechanics fluid dynamics	
기체 gas				

열역학 = 열에너지를 다루는 학문

≡

기계진동학 [mechanical vibration]　≠

=

0.2 기계진동학 [Mechanical Vibration]

정역학 ≡ 힘[force]과 평형[equilibrium]의 관계를 다루는 학문.

힘 ⇒

동역학 ≡ 힘[force]과 운동[motion]의 관계를 다루는 학문.

힘 ⇒

고체역학 ≡ 힘[force]과 변형[deformation]의 관계를 다루는 학문.

힘 ⇒

유체역학 ≡ 유체(액체와 기체)에 대하여 힘과 평형, 운동, 변형 등을 다루는 학문

물체 질점[particle] : 질량은 고려되나 부피가 무시되는 물체

강체[rigid body] : 질량과 부피가 고려되나 변형은 무시되는 물체

유연체[flexible body] : 변형이 고려되는 물체

<u>기계진동학</u> [mechanical vibration]

≡ *역학적* 반복 운동을 다루는 동역학의 한 분야

진동(반복운동) = 반복적인 에너지 변환에 따른 운동

역학적 진동 =

즉, 운동에너지와 변형(위치)에너지 간의 반복적인 에너지 변환에 따른 운동

통상 기계적 진동이라 부름. ≠

cf. 전자기적 진동

본 과목에서 ‘진동’이라 함은 ‘기계적 진동’ 즉 ‘역학적 진동’을 의미

진동 설계 대상

진동 억제 - 부정적 진동 : 원하지 않는 진동

예 -

vibration control : passive, active

예 -

진동 활용 - 긍정적 진동 : 원하는 진동

예 -

교과목 연계

고급공학수학1

↓

동역학, 고체역학 → **기계진동학** → 진동실험

↓

자동제어

0.3 진동 해석 [vibration analysis]

설계 방법 :

예.

해 석 [analysis]

modeling : 복잡한 물리적 현상을 단순화하여 수식으로 표현

(운동방정식, 지배방정식 + 초기조건, 경계조건)

\+

solving : 수학적으로 표현된 방정식의 해를 구함

⇒ prediction :

진동 해석

복잡한 진동 현상을 단순화하여 수학적(운동방정식)으로 표현[modeling]하고,

그 해를 구하는 [solving] 과정으로서,

설계단계에서 제품의 진동 성능을 예측[prediction]하는 방법.

해석 대상 :

물리계[系, physical system] - 실제 물리계는 복잡하고 해석하기 어렵다!

↓ 이상화[idealization]

수학적 모델[mathematical model]

파라미터[parameters] - 계의 물리적 성질[physical properties of a system]

예:

계의 유형 system type	이산계 discrete systems	연속계 continuous systems
파라미터 유형 parameter type	집중 파라미터 lumped paremeters	분포 파라미터 distributed parameters
수학적 표현 mathematical expressions	상미분방정식 + 행렬 ODE + matrix equation	편미분방정식 PDE
자유도 DOF	유한 finite	무한 infinite
교과과정 courses	1,2-DOF 학부 / multi-DOF 대학원	대학원

자유도 [DOF, degree-of-freedom]

≡

the number of independent coordinates required to describe the motion completely

운동을 생성하기 위해 요구되는 운동 성분의 개수

the number of components of motion that required in order to generate the motion

=

1자유도계 자유진동 (초기가진)

" 강제진동 (조화가진)

" 강제진동 (일반가진)

2자유도계 자유/강제 진동

진동 억제

실험 이론

제1장 진동 소개와 자유응답 [Intro. to Vibration & Free Response]

(1자유도계의 자유진동) p.13

<u>1자유도계</u> [1 DOF] (하나의 질점이 한 방향으로 운동하는 경우)

예. p.20

가장 간단한 이산계 모델

운동방정식 표현 →

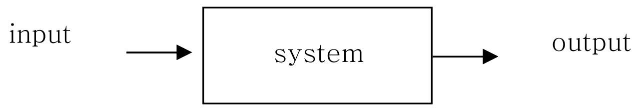
실제 물리계에는 1자유도계 보다 다자유도계 또는 연속계가 훨씬 더 많다.

예.

그럼에도 1자유도계를 공부하는 이유 :

1. 다자유도계 또는 연속계를 대상으로 하더라도 관심사가 단순한 경우가 있다.
   예.
2. 많은 다자유도계 및 연속계와 관련된 수학적 표현-연립미분방정식-은
   (모드해석에 의해) 여러개의 독립적(비연립)인 미분방정식으로 변환될 수 있고,
   각각의 미분방정식은 1자유도계의 운동방정식과 같은 형태이다.

계의 <u>응답</u> [response] =



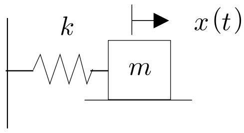
초기(t=0) 가진에 대한 응답 =

가진력[applied force]에 대한 응답 =

1.1 자유진동 [free vibration] p.16

(스프링-질량 모델 = 비감쇠 1자유도계)

단순 조화 진동자 [simple harmonic oscillator]



운동 표현 : 변위 $x(t)$ t : 시간 time (초, s)

속도 $\dot{x} = \dfrac{dx(t)}{dt}$

가속도 $\ddot{x} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

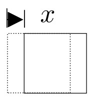
요 소[element]

스프링 :

댐퍼[damper] :

질량체 :

진동 모델링 [modeling]



힘의 평형

Newton의 제2법칙

⇒ : 운동방정식

물성치 (파라미터 값) 그림1.5

질량 계측 :

스프링상수 계측 : 그림1.3, 그림1.4 p.18

예: m = 15 kg, δ = 0.01 m

$mg - k\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad k =$

중력의 영향

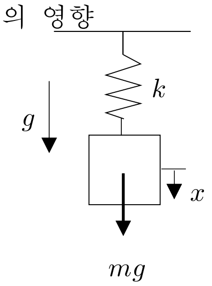
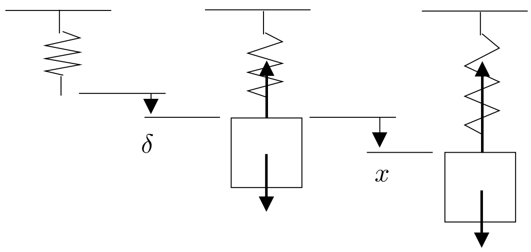


그림1.2



해 [solution]

<교재의 설명>

주기운동을 sine함수 형태로 표현 (물리적 관찰로부터 가정 - 단순조화진동)

$x = A\sin(\omega_n t + \phi)$ $\quad \dot{x} = \omega_n A\cos(\omega_n t + \phi)$ $\quad \ddot{x} = -\omega_n^2 A\sin(\omega_n t + \phi)$

운동방정식에 대입 $\quad m[-\omega_n^2 A\sin(\omega_n t + \phi)] + k[A\sin(\omega_n t + \phi)] = 0$

$\Rightarrow \quad (-m\omega_n^2 + k)\ A\sin(\omega_n t + \phi) = 0$

$\Rightarrow \quad -m\omega_n^2 + k = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega_n^2 =$

<더 좋은 설명> ← 1.2절 p.29

$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \omega_n{}^2 x(t) = 0 \qquad \omega_n{}^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_n =$

$x(t) = a e^{\lambda t}$ 대입 $\qquad \lambda^2 a e^{\lambda t} + \omega_n{}^2 a e^{\lambda t} = 0 \qquad (\lambda^2 + \omega_n{}^2) a e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega_n{}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm j\omega_n \qquad j = \sqrt{-1}$

$x(t) = a_1 e^{j\omega_n t} + a_2 e^{-j\omega_n t} = a_1(\cos\omega_n t + j\sin\omega_n t) + a_2(\cos\omega_n t - j\sin\omega_n t)$

$= A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t \qquad A_1 = a_1 + a_2, \quad A_2 = j(a_1 - a_2)$ p.31

$= A \sin\phi \cos\omega_n t + A \cos\phi \sin\omega_n t$

$= A \sin(\omega_n t + \phi)$ 그림1.6 p.21

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} > 0$: $\qquad \phi = \tan^{-1}\frac{A_1}{A_2}$:

:

(각)<u>고유진동수</u> [(angular) natural frequency]

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (단위 : rad/s) $\qquad f_n = \frac{\omega_n}{(2\pi\,\mathrm{rad})}$ (단위 : cycles/s = Hz)

:

<u>자유 응답</u>

초기 조건 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ 를 고려한 운동방정식의 해

미지수 A, ϕ : 초기조건 x_0, v_0 를 적용하여 구함

$x(0) = A \sin(\omega_n \cdot 0 + \phi) = \underline{A \sin\phi = x_0}$ ⋯ ① $\qquad \dot{x}(t) = \omega_n A \cos(\omega_n t + \phi)$

$\dot{x}(0) = \omega_n A \cos(\omega_n \cdot 0 + \phi) = \omega_n A \cos\phi = v_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A \cos\phi = \frac{v_0}{\omega_n}}$ ⋯ ②

①^2 + ②^2 ⇒ $A = \cdots$ $\qquad$ ① ÷ ② ⇒ $\phi = \cdots$ (1.9)

$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi)$ 그림1.7 p.21

⇒ $x(t) = [\cdots] \sin([\cdots]t + [\cdots])$ (1.10) *식(1.9)와 (1.10)을 절대로 암기하지 말 것 !*

: 자유응답[free response] (자유진동)

$t = 0$ 이후에 계에 외란[disturbance]이 가해지지 않음.

예<연습1.7> $\omega_n = 2$ rad/s, $x_0 = 1$ mm, $v_0 = \sqrt{5}$ mm/s 의 경우에 대해 $m\ddot{x} + kx = 0$ 의 해를 구하고, 두 주기 동안의 결과를 그래프로 나타내어라. p.108

$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \qquad \dot{x}(t) = \omega_n A \cos(\omega_n t + \phi)$

$x(0) =$ ⋯ ①

$\dot{x}(0) = \omega_n A \cos\phi = v_0 \quad \Rightarrow \quad A \cos\phi =$ ⋯ ②

①^2 + ②^2 ⇒ $A =$

① ÷ ② ⇒ $\phi =$

∴ $x(t) =$

Window 1.2 p.25

예제1.1.1 단진자 (뉴튼법칙) $\qquad$ 예제1.1.2 초기조건

예제1.1.3 고유진동수와 질량으로부터 강성을 구함. $\qquad$ 예제1.1.4 위상 ϕ

연습

1.2 조화운동 [harmonic motion] p.25

진폭, 위상차 [amplitude, phase]

변위 $x(t) = A\ \sin(\omega_n t + \phi)$ (그래프 x vs. t) Window 1.3 p.26

속도 $\dot{x}(t) = \omega_n\ A\ \cos(\omega_n t + \phi)$ (그래프 $\dot{x}$ vs. t)

가속도 $\ddot{x}(t) = -\omega_n^{\,2}\ A\ \sin(\omega_n t + \phi)$ (그래프 $\ddot{x}$ vs. t)

변위 진폭 $x_{\max} =$ 속도 진폭 $\dot{x}_{\max} =$ 가속도 진폭 $\ddot{x}_{\max} =$

진동수와 주기 [frequency, period]

(각)진동수 ω_n (단위 : rad/s)

진동수, 주파수 $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi\,\mathrm{rad}}$ (단위 :

주기 $T = \dfrac{1}{f_n} = \dfrac{2\pi\,\mathrm{rad}}{\omega_n}$ (단위 :

예제1.2.1 $m,\ k$ → 고유진동수 $\omega_n,\ f_n$, 주기 T p.28

$x_0,\ v_0 = 0$ → 최대 진폭 A

예<연습1.40> 거친 도로 위를 움직이는 자동차가 최대 변위 진폭이 5 cm이고 최대 가속도가 2,000 cm/s^{2}로 수직방향으로 진동하고 있다. 자동차를 수직방향에서의 1자유도계로 모델링 할 수 있다고 가정하고, 자동차의 고유진동수를 계산하여라. p.113

$x_{\max} = A = 5$ cm, $\ddot{x}_{\max} = 2{,}000$ cm/s^2

$\ddot{x}_{\max} = \omega_n^{\,2} A$ $\Rightarrow$ $\omega_n =$

$f_n =$

예제1.2.2 단진자[pendulum]의 고유진동수 p.29

예제1.2.3 단진자 최대 각속도, 최대 각가속도 p.32

진폭 표기

zero-to-peak amplitude $x_{0\text{-p}}$ (통상 진폭이라고 함) (=

peak-to-peak amplitude $x_{\text{p-p}}$ (=

root-mean-squared amplitude x_{rms} (=

(제곱)평균제곱근

평균 $\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_0^T x(t)dt =$

제곱-평균-제곱근 $\left(\overline{x^2}\right)^{1/2} = \left[\lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_0^T [x(t)]^2 dt\right]^{1/2}$

데시벨(dB) 단위

비의 상용로그 $= \log_{10}\dfrac{E_1}{E_0} = \log_{10}\dfrac{x_1^2}{x_0^2}$ (Bell) 1 Bell =

$10\log_{10}\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)^2 = \underline{20\log_{10}\dfrac{x_1}{x_0} \quad \text{(dB)}}$

종종 x_0는 기준 크기를 의미

크기 차이가 자릿수 단위로 차이 날 때 유용한 표현 방식

예 1 : 중력가속도를 기준으로 (1) 10배의 진동가속도,

(2) 10,000배의 진동가속도를 dB 단위로.

(1) (2)

예 2 : 진폭 1 m와 1 μm의 크기 비

음압(sound pressure) p

음압레벨 $20\ \log_{10}\dfrac{p}{p_0}$ p_0 =

<u>환경 진동</u>

환경 -

진동이 인간에게 미치는 영향 (부정적 진동)

인간은 주파수 8 Hz 이상의 진동을 느낄 수 있고, 변위보다 가속도를 더 잘 느낀다.

주파수 30 Hz에서 2 m/s^2 크기의 가속도를 갖는 진동은 자동차 승객에게 매우 불쾌감을 준다.

30 Hz ×

진동이 인체에 미치는 영향

연습

1.3 점성감쇠 [viscous damping] p.33

감쇠 : <u>점성감쇠</u>, 쿨롱[Coulomb]감쇠, 이력[hysteretic]감쇠, 공기감쇠 등

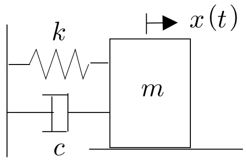
감쇠기[dashpot 또는 damper] 그림1.8 p.34

:

점성감쇠력 $\propto$ $\dot{x}(t)$ = $c\ \dot{x}(t)$ 비례상수 c :

(cf. 쿨롱감쇠력 = , 공기감쇠력 $\propto$)

운동방정식[equation of motion]



FBD

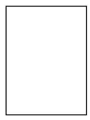


그림1.9 p.35

: 1자유도 감쇠계의 운동방정식

해[solution]

계수가 상수인 상미분방정식의 해

$x(t)$ = $a\ e^{\lambda t}$ 형태를 운동방정식에 대입 $\Rightarrow$ $(m\lambda^2 + c\lambda + k)\ a\ e^{\lambda t} = 0$, $a\ e^{\lambda t} \neq 0$

$\Rightarrow$ $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$c^2 - 4mk > 0$ 이면 $\lambda_{1,}\ \lambda_2$ 는

$c^2 - 4mk < 0$ 이면 $\lambda_{1,}\ \lambda_2$ 는

$c^2 - 4mk = 0$ 이면 $\lambda_{1,}\ \lambda_2$ 는

$c_{cr} = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$:

ω_n :

감쇠비[damping ratio], ζ (

$$\zeta \equiv \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad c =$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ , \qquad \frac{k}{m} =$$

$$\frac{c}{m} = \frac{2m\omega_n\zeta}{m} =$$

$\ddot{x}(t) + 2\ \zeta\omega_n\ \dot{x}(t) + \omega_n{}^2\ x(t) = 0$: 표준형태 (고유진동수, 감쇠비로 표현)

$x(t) = a\ e^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n{}^2 = 0$:

$\lambda_{1,2} = -\ \zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\ \omega_n$ $x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$

감쇠비 ζ의 크기에 따라 근이 실수 혹은 복소수가 되며,

1자유도 감쇠계의 응답특성을 결정한다.

$\zeta > 1$ $\leftarrow$

$\zeta = 1$ $\leftarrow$

$0 < \zeta < 1$ $\leftarrow$

$\zeta = 0$ (즉 $c = 0$)

예제1.3.1 감쇠비 계산, 감쇠 유형 결정 p.40

<u>부족감쇠운동</u> [underdamped motion] $0 < \zeta < 1$

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{(-1)(1-\zeta^2)} = \sqrt{-1}\,\sqrt{1-\zeta^2} = j\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_d \equiv \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$: 감쇠[damped](각)고유진동수

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = -\zeta\omega_n + j\,\omega_d$$

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n - j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = -\zeta\omega_n - j\,\omega_d$$

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = a_1 e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)t} + a_2 e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)t}$$

$$= a_1 e^{-\zeta\omega_n t} e^{j\omega_d t} + a_2 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-j\omega_d t} = e^{-\zeta\omega_n t}\left[a_1 e^{j\omega_d t} + a_2 e^{-j\omega_d t}\right]$$

$$a_1 e^{j\omega_d t} + a_2 e^{-j\omega_d t} = a_1\ (\cos\omega_d t + j\ \sin\omega_d t) + a_2\ (\cos\omega_d t - j\ \sin\omega_d t)$$

$$= (a_1 + a_2)\ \cos\omega_d t + (a_1 - a_2)\ j\ \sin\omega_d t = A_1\ \cos\omega_d t + A_2\ \sin\omega_d t$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\ [\ A_1\ \cos\omega_d t + A_2\ \sin\omega_d t\ ]$$ Window 1.5 p.37

$$A_1 = A\ \sin\phi\ , \quad A_2 = A\ \cos\phi$$

$$A_1\ \cos\omega_d t + A_2\ \sin\omega_d t = A\ (\sin\phi\ \cos\omega_d t + \cos\phi\ \sin\omega_d t) = A\ \sin(\phi + \omega_d t)$$

$$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi)$$

또는 $A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \cos(\omega_d t - \phi_2)$

초기조건 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ 적용

$$\dot{x}(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ [\ -\zeta\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)\ ]$$

$$x(0) = A\ \sin\phi = x_0 \quad \cdots ①$$

$$\dot{x}(0) = A\ (-\zeta\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi) = v_0 \quad \Rightarrow \quad A\ \cos\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \quad \cdots ②$$

$①^2 + ②^2 \quad \Rightarrow \quad A = \cdots \qquad ① \div ② \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}(\cdots)$ (1.38)

$$x(t) = [\cdots]\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + [\cdots])$$

식(1.38)을 절대로

그래프 $x(t)$ vs. t 그림1.10 p.38

예제1.3.2 인간의 다리[human leg] p.41

예제1.3.3 $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\ [\ A_1\ \cos\omega_d t + A_2\ \sin\omega_d t\ ]$ 에서 출발 p.42

$A_1 =$, $A_2 =$

예<기출 2009> 스프링, 감쇠기(damper), 질량체로 이루어진 1자유도 감쇠계가 있다. 자유응답이 다음과 같은 형태로 표현되었다. ω_n = 300 rad/s, ζ = 0.150 인 1자유도 감쇠계에서 초기 변위 $x(0)$가 -25.0 mm이고, 초기 속도 $\dot{x}(0)$가 40.0 mm/s일 때, 진폭 A와 위상 ϕ를 구하여라.

$$x(t) = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.150^2}\,(300\,\text{rad/s}) = 297 \text{ rad/s}$$

$$\zeta\omega_n = (0.150)(300 \text{ rad/s}) = 45.0 \text{ rad/s}$$

$$x(t) = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi), \qquad \dot{x}(t) = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\,[-\zeta\omega_n\sin(\omega_d t+\phi) + \omega_d\cos(\omega_d t+\phi)]$$

$$x(0) = A\sin\phi = -25.0 \text{ mm} \qquad \cdots ①$$

$$\dot{x}(0) = A\,[-\zeta\omega_n\sin\phi + \omega_d\cos\phi] = v_0$$

$$\Rightarrow \quad A\cos\phi = \frac{1}{\omega_d}\,[v_0 + (\zeta\omega_n)\,A\sin\phi]$$

$$= \frac{1}{297\,\text{rad/s}}[(40.0 \text{ mm/s}) + (45.0 \text{ rad/s})(-25.0 \text{ mm})] = -3.65 \text{ mm} \qquad \cdots ②$$

$$①^2 + ②^2\,; \quad A = \sqrt{(-25.0\,\text{mm})^2 + (-3.65\,\text{mm})^2} = 25.3 \text{ mm}$$

$$① \div ②\,; \quad \tan\phi = \frac{-25.0}{-3.65} = 6.85$$

$$\phi = \tan^{-1}(6.85) = 1.426 \text{ rad}, \ 4.57 \text{ rad}, \cdots$$

①과 ②를 만족하는 ϕ는 3사분면에 있으므로, $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi$ rad

$$\Rightarrow \qquad \phi = 4.57 \text{ rad}$$

<u>과도감쇠운동</u> [overdamped motion] $\zeta > 1$

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n\,, \qquad \lambda_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n$$

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = a_1 e^{(-\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n)t} + a_2 e^{(-\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n)t}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}[a_1 e^{\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n t} + a_2 e^{-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n t}] \qquad :$$

$a_1,\ a_2$ 는

그래프 $x(t)$ vs. t 그림1.11 p.39

<u>임계감쇠운동</u> [critically damped motion] $\zeta = 1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\,\omega_n$$

$$x(t) = a_1\,e^{-\omega_n t} + a_2\,t\,e^{-\omega_n t}$$

$$= (a_1 + a_2 t)e^{-\omega_n t} \qquad :$$

$a_1,\ a_2$ 는

$\Rightarrow \qquad a_1 = x_0, \quad a_2 = v_0 + \omega_n x_0$

그래프 $x(t)$ vs. t 그림1.12 p.40

연습

1.4 모델링과 에너지 방법 [modeling and energy method] p.43

모델링 [modeling] ≡ 복잡한 물리 현상을 단순화하여 수학적으로 표현

즉, 물체의 운동을 기술하는 방정식을 쓰는 방법 혹은 과정

(해석 = 모델링 + 해)

모델링 방법 :

Newton의 법칙 (제2법칙)

물체에 가해진 힘 벡터의 합 = 질량중심의 절대 운동량[momentum]의 변화율

(질량보존 상태에서) 운동량(질량×속도)의 변화율 =

$$\sum_i f_{xi} = m\ddot{x}$$ (1자유도계의 경우)

f_{xi} : x방향으로 질량 m에 작용하는 i번째 힘

질량중심에 대한 회전축 주위의 torque의 합 = 질량의 각운동량[angular momentum]의 변화율

(관성모멘트 보존 상태에서)

각운동량(관성모멘트×각속도)의 변화율 =

$$\sum_i M_{Oi} = I_O\ddot{\theta}$$

M_{Oi} : O점 주위로 물체에 작용하는 torque

I_O : 회전축에 대한 질량 관성모멘트[mass moment of inertia]

θ : 회전각

단점 : 힘(과 torque)를 알아야 활용 가능하다.

에너지 방법

에너지 보존법칙 (principle of energy conservation)

: 운동에너지[kinetic energy] T와 위치에너지[potential energy] U의 합은 매순간 일정.

(또는 변형에너지[strain energy])

$T + U$ = constant

즉, $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$ 또는 $\frac{d}{dt}(T+U) = 0$ … (1)

물체가 정적평형 위치(x=0)를 지날 때, 속도 최대 ⇒ T = , U =

물체가 최대변위를 지날 때, 속도 $\dot{x}$ = 0 ⇒ T = , U =

따라서 $T_{\max} = U_{\max}$ … (2)

장점 1 : 에너지는 스칼라 양이므로 를 이용하지 않고 계의 운동방정식을 얻는다.

예 : 스프링-질량 계의 직선운동 혹은 병진운동[translational motion]

스프링의 위치에너지 U_{spring} =

중력에 의한 위치에너지 U_{gravity} =

운동에너지 T =

(1)→ $\frac{d}{dt}[$

⇒

장점 2 : 보존계의 고유진동수를 직접 구할 수 있다.

(2)→ $T_{\max} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{\max})^2 =$, $U_{\max} = \frac{1}{2}k(x_{\max})^2 =$

$\frac{1}{2}m(\omega_n A)^2 = \frac{1}{2}k A^2$ ⇒ $\omega_n =$

단, 이 때는 운동방정식을 구할 수 없다.

예제1.4.3 <u>축-원판 계의 회전운동</u> [rotational motion] (그림 Window1.1) p.47

축의 비틀림 강성 k_t

원판의 질량관성모멘트 $J \ (= \frac{1}{2}mR^2)$

가정 : 축의 관성모멘트는 무시할 만큼 작고, 원판은 강체

축의 변형에너지 $U =$

원판의 운동에너지 $T =$

$\frac{d}{dt}($ ⇒

⇒ $J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$ 축에 부착된 원판의 비틀림 진동에 대한 운동방정식

해 $\theta(t) = A\ \sin(\omega_n t + \phi)$ 고유진동수 $\omega_n =$

단점 :

예제1.4.2 매달린 질점의 <u>단진자(pendulum) 운동</u> (그림 Window1.1) p.47

가정 : 진자 줄의 질량은 무시할 만큼 작다.

i) 뉴튼법칙 이용 <연습1.15> <예제1.1.1> 또는 오일러 법칙

⇒ $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

ii) 에너지방법 이용

운동에너지 $T = \frac{1}{2}mv^2 =$

$ml^2 \equiv J$: O점에 대한 질량관성모멘트

위치에너지 $U = mgh =$

$\frac{d}{dt}[$ ⇒

$ml\dot{\theta}\ (l\ddot{\theta} + g\ \sin\theta) = 0$, $ml\dot{\theta} \neq 0$

⇒ $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

$\theta \simeq 0$ 이면 $\sin\theta \simeq$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ 단진자의 운동방정식

고유진동수 $\omega_n =$

예제1.4.1 바퀴의 회전운동과 병진운동 p.46

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \qquad x = \qquad J : \text{질량관성모멘트}$$

유효질량[effective mass] $m_e = m + \frac{J}{r^2}$

예제1.4.4 스프링-질량 계, 스프링의 질량 고려. p.49

$$m_e = m + \frac{1}{3} m_s$$

예제1.4.5 U자형 액주계[manometer]. p.50

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}} \qquad \Leftarrow \text{ 뉴튼법칙 } -(\gamma A x) - (\gamma A x) = (\frac{\gamma}{g} A l) \ddot{x}$$

예제1.4.6 복합진자 - 분포질량. p.51

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2 \right) (\dot{\theta})^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mgh = mg \left[\frac{1}{2} l (1 - \cos\theta) \right] = \frac{1}{2} mgl (1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl (1 - \cos\theta) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} mgl \sin\theta \; \dot{\theta} = 0$$

$$m l \dot{\theta} \left(\frac{1}{3} l \ddot{\theta} + \frac{1}{2} g \sin\theta \right) = 0 , \quad m l \dot{\theta} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

$\theta \simeq 0$ 이면 $\sin\theta \simeq \theta$, $\quad \ddot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \theta = 0$

예제 1.4.7 Lagrange's method (생략) p.55

예제 1.4.8 단진자+스프링 <연습 1.112>도립진자 + 스프링 p.58

직선운동과 회전운동 계의 비교 (← 표 1.1) p.58

axial vibration (translational motion)		torsional vibration (rotational motion)	
displacement	$x(t)$	angular displacement (rotation)	$\theta(t)$
force	F	torque (moment)	M
stiffness	k	torsional stiffness	k_t
viscous damping	c	torsional viscous dampling	c_t
mass	m	mass moment of inertia	J 또는 I_O

연습

1.5 강성 [stiffness]

p.58

스프링 상수

많은 탄성부재들은 스프링으로 간주될 수 있다.

0\. 헬리컬 스프링 (코일 스프링) 그림1.25 p.61

스프링 재료의 지름 d, 코일 지름 $2R$, 코일 감은 수 n, 전단탄성계수 G

하중 F, 변형 x 기계요소설계 p.795 식13-13

$$x = \frac{64nR^3}{Gd^4}F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Gd^4}{64nR^3}x \qquad (x =$$

$\Rightarrow$ 스프링상수(강성) $k =$

1\. 종진동하는 봉 [thin rods in axial vibration] 그림1.23 p.59

막대의 길이 l, 단면적 A, (종)탄성계수(영률) E

종방향 하중 F, 변형 x

$$x = \frac{Fl}{EA} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{EA}{l}x$$

$\Rightarrow$ 스프링상수(강성) $k =$

$\Rightarrow$ 고유진동수 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} =$

2\. 비틀림 진동하는 축 [shafts in torsional vibration] 그림1.24 p.59

막대의 길이 l, 면적관성모멘트 $J_p(= \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{32}d^4)$, 전단(횡)탄성계수 G

torque T, 비틀림 각 θ

$$\theta = \frac{Tl}{GJ_p} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{GJ_p}{l}\theta$$

$\Rightarrow$ 비틀림강성 $k_t =$

예제1.5.1 비틀림 계의 고유진동수 p.60

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}} \qquad J =$$

표1.2 물리적 상수[physical constants] p.59

steel	$E =$,	$G =$
aluminum	$E =$,	$G =$

3. 횡진동하는 보 [bars in bending vibration]　　　　　　　그림1.26　　　　　　　p.61

i) 외팔보

외팔보의 길이 l, 단면의 면적관성모멘트 I $(=\frac{1}{12}bh^3)$, 탄성계수(영률) E

횡방향 하중 F, 변형 x

$$x = \frac{Fl^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3EI}{l^3}x$$

$\Rightarrow$　횡강성　k_b =

예제1.5.2 비행기 날개(횡강성)에 달린 연료탱크 질량 변화에 따른 고유진동수 변화　　p.61

ii) 양단 고정 보

중앙에서　$x = \dfrac{Fl^3}{192EI}$

$\Rightarrow$　횡강성　k_b =

예제1.5. 배의 roll운동 진동　(pitching, rolling, yawing)　　　　　　p.65

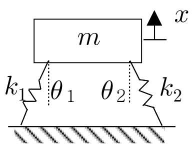
<u>등가 스프링</u> [equivalent spring]

병렬[parallel]연결　$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$　$\leftarrow$　$F = F_1 + F_2 =$

직렬[serie]연결　$k_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)^{-1}$　$\leftarrow$　$x = x_1 + x_2 =$

예제1.5.5　복합스프링-질량 계의 고유진동수　　(병렬 + 직렬)　그림1.32　　p.67
예제1.5.6　　"　　"　　"　　(병렬 + 직렬)　　p.68

예. 경사진 스프링



$F = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2$　$\leftarrow$　$F_1 = k_1 \delta_1$　$\leftarrow$　$\delta_1 = x \cos\theta_1$

$k_{eq}\,x$ =

k_{eq} =

연습

1.6 측정 [measurement]　　　　　　　p.70

<제7장 진동실험>으로 연기

1.7 설계상 고려할 점 [design considerations] p.75

진동계의 설계 = 어떠한 기기의 진동응답이 특정한 '모양'이나 '성능'의 기준을 충족시키도록 물리적 *파라미터*를 조정하는 것

파라미터[parameters] : $\Rightarrow$

(i) 응답의 모양[response shape]

$\leftarrow$ 과도($\zeta>1$), 부족($\zeta<1$) 감쇠 $\leftarrow$

제한 조건[constraints]

예.

예제1.7.1 진동 진폭이 항상 25 mm 보다 작도록 하는 감쇠계수 값 p.76

예<연습 1.102> 12 kg 질량에 부착된 10^3 N/m 강성의 헬리컬 스프링으로 구성된 예제 1.7.2의 시스템을 고려한다. 감쇠기를 스프링에 병렬로 놓아, 감쇠고유진동수가 9 rad/s로 줄도록 점성감쇠 값을 선택하여라. p.123

ω_d = 9 rad/s, c = ?

$$m = 12\ \text{kg},\quad k = 10^3\ \text{N/m} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{10^3\ \text{N/m}}{12\ \text{kg}}} = 9.129\ \text{rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \rightarrow \quad \zeta = \sqrt{1-\left(\frac{\omega_d}{\omega_n}\right)^2} = \qquad =$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad \rightarrow \quad c = \qquad = 2\ (0.1673)\ \sqrt{(12\ \text{kg})(10^3\ \text{N/m})}$$

$$= 36.7\ \text{kg/s}$$ (교재 답 87.2 오류)

(ii) 성능[performance]

원하는 특정 고유진동수

예. 스프링 설계 (재료의 직경, 코일 반지름, 감은 수 등) $k = \dfrac{Gd^4}{64nR^3}$

예제1.7.2 10 kg 질량에 헬리컬 스프링이 부착될 때 스프링-질량계가 10 rad/s(약1.6 Hz)의 고유진동수를 갖도록 헬리컬 스프링을 설계하라. p.78

예<연습1.106> 12 kg 질량에 부착된 알루미늄 스프링에 대하여 예제 1.7.2를 반복하라. p.123

m = 12 kg, ω_n = 10 rad/s, (d = 1 cm), aluminum $G = 26.7\times10^9$ N/m^2

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow \quad k = \qquad = (12\ \text{kg})\ (10\ \text{rad/s})^2 = 1{,}200\ \text{N/m}$$

$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3} \quad \rightarrow \quad nR^3 = \qquad = \frac{(26.7\times10^9\ \text{N/m}^2)(0.01\ \text{m})^4}{64\,(1{,}200\ \text{N/m})} = 3.48\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

R = 10 cm 이면, n = $\qquad = \qquad \approx$

R = 5 cm 이면, $n = \dfrac{3.48\times10^{-3}\ \text{m}^3}{(0.05\ \text{m})^3} =$

예제1.7.3 설계의 어려움. p.79

가령

연습 (과제 없음)

1.8 안정성 [stability] p.80

stable response 그림1.37

unstable response 그림1.38, 1.39

예제1.8.1 도립진자[inverted pendulum]

그림1.40

예.

연습

1.9 시간응답의 수치적 해석 [numerical simulation of the time response]

MATLAB 실습 p.84

1.10 쿨롱 마찰과 진자 [Coulomb friction and the pendulum] p.93

비선형 문제 (생략)