연 속 계 진 동 해 석　　학 기 말 시 험

[30 점]

대학원 기계공학과　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2010. 6. 15.

< closed-book exam >

1.[8점] 연속계의 진동을 해석하는 방법들을 크게 세 가지 유형으로 분류하면

(1) 엄밀해법(exact solution method),

(2) 근사해법(approximate solution method),

(3) 유한요소법(finite-element method)

들이 있다. 다음 사항을 서술하시오.

(a) 세 가지 접근방법 각각의 용도.

(b) 근사해법 중 lumped-parameter method에 속하는 방법들의 종류와 절차.

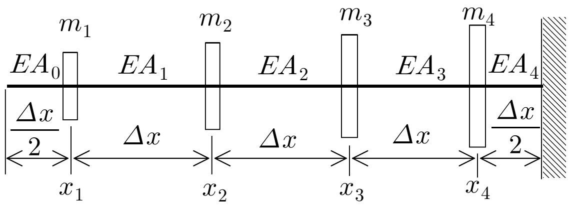
(c) 근사해법 중 series discretization method에 속하는 방법들의 종류와 절차.

(d) 유한요소법의 절차.

2-5. 길이가 L인 불균일 막대(rod)가 경계 x=0에서 자유롭고 x=L에서 고정되며, 단위 길이당 질량 $m(x)$와 axial rigidity $EA(x)$가 각각 다음과 같다.

$$m(x) = m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right], \qquad EA(x) = EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

2.[6점] Holzer's method를 사용함에 있어서, 아래 그림과 같이 4개의 station을 균등 간격으로 배치하는 모델을 설정한다.



(a) 각 station의 transfer matrix들을 구하시오.

(b) 각 field의 transfer matrix들을 구하시오.

(c) overall transfer matrix를 구하기 위한 식을 제시하시오(행렬 곱셈 계산 불필요).

3.[4점] Rayleigh's energy method를 사용함에 있어서, 균일한 봉의 1차 모드 [$U(x) = \sin\frac{\pi(L-x)}{2L}$]를 trial function으로 택하여 기본 고유진동수를 구하시오.

4.[6점] Rayleigh-Ritz method를 사용함에 있어서, 2개 항의 series를 설정하여 mass matrix와 stiffness matrix를 구하여 algebraic eigenvalue problem을 구성하려 한다. 균일한 봉의 1차 모드와 2차 모드를 comparison function으로 선택한다.

(a) mass matrix에 들어갈 mass coefficient들을 계산하는 식을 제시하시오.

(b) stiffness matrix에 들어갈 stiffness coefficient들을 계산하는 식을 제시하시오.

(적분 계산 불필요).

(뒷면에 계속)

5.[6점] 막대(rod)의 축방향 진동 해석에 FEM을 사용함에 있어서, 막대를 3개의 sectionally-constant elements로 균등 분할한다.

(a) 각 element의 mass matrix를 구하시오.

(b) 각 element의 stiffness matrix를 구하시오.

(c) assembly를 통하여 global mass matrix와 stiffness matrix를 구하시오.

(끝)

연속계진동해석　　학기말시험　해 답　　　　2010년 1학기

[1] (a) 엄밀해법의 용도 : 균일하게 분포된 시스템에 대한 해석
근사해법의 용도 : 불균일하지만 불균일성이 크지 않은 시스템에 대한 해석
유한요소법의 용도 : 임의의 불균일 시스템에 대한 해석

(b) lumping method : 시스템을 여러 개의 segment로 분할하여 각 segment에 mass와 stiffness를 집중시키고, 시스템의 mass matrix와 stiffness influence matrix를 구성하여 algebraic eigenvalue problem을 형성함.

influence coefficients method : 시스템을 여러 개의 segment로 분할하여, 각 segment에 mass를 집중시켜서 시스템의 mass matrix를 구성하고, flexibility influence coefficient를 계산하여 구성한 matrix의 역행렬로서 stiffness influence matrix를 구성하여 algebraic eigenvalue problem을 형성함.

Holzer's method : shaft의 torsional vibration, rod의 axial vibration, string의 transverse vibration에 적용할 수 있는 방법으로서, 시스템을 분할하여 station의 mass와 field의 stiffness로부터 transfer matrix를 구성하고, 경계조건을 적용하여 frequency equation을 형성하여 natural frequency와 modal vector를 구함.

Myklestad's method : beam의 bending vibration에 적요할 수 있는 방법으로서, 시스템을 분할하여 station의 mass와 field의 stiffness로부터 transfer matrix를 구성하고, 경계조건을 적용하여 frequency equation을 형성하여 natural frequency와 modal vector를 구함.

(c) Rayleigh's quotient : maximum potential energy와 reference kinetic energy에 trial function을 대입하여 그 비율로부터 1차 고유진동수의 상한값을 구함.

Rayleigh-Ritz method : trial function의 선형 결합으로 해의 형태를 구성하고, Rayleigh quotient의 도함수가 0이 되도록 하여 mass matrix와 stiffness matrix를 형성하고, eigenvalue problem의 해를 구함.

assumed mode method : Rayleigh-Ritz method에 추가하여 external force를 포함시킨 방정식에 modal analysis를 적용하여 시스템의 response를 구함.

Galerkin's method : eigenvalue problem에 trial function을 적용할 때의 나머지(residual)에 trial function을 가중 함수(weighted function)로 곱하여 영역에서 적분한 결과가 0이 되도록 함으로써 평균적으로 방정식을 만족하는 algebraic eigenvalue problem을 구성하여 해를 구함.

collocation method : eigenvalue problem에 trial function을 적용할 때 특정 지점의 경계조건 또는 방정식을 만족하도록 함으로써 algebraic eigenvalue problem을 구성하여 해를 구함.

(d) a complex structure (system)

$\downarrow$　　discretization

finite elements

$\downarrow$　　variational approach　　$\leftarrow$ *Rayleigh-Ritz method*

equations of motion for individual elements　　$\Rightarrow$　　element matrix $K_j,\ M_j$

$\downarrow$　　assembly

equations of motion for the system　　$\Rightarrow$　　global matrix $K,\ M$

$\downarrow$　　solution

motion at the nodes

$\downarrow$　　interpolation

motion inside the elements

[2] $m(x) = m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$, $EA(x) = EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$, $n = 4$, $\Delta x = \frac{L}{4}$

$x_1 = \frac{1}{8}L$, $x_2 = \frac{3}{8}L$, $x_3 = \frac{5}{8}L$, $x_4 = \frac{7}{8}L$

(a) inertia coefficients $\quad m_i = m(x_i)\Delta x$

$$m_1 = m(x_1)\Delta x = m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\right]\frac{L}{4} = \frac{65\,m}{128}\frac{L}{4} = \frac{65}{512}mL = 0.1270\ mL$$

$$m_2 = m(x_2)\Delta x = m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2\right]\frac{L}{4} = \frac{73\,m}{128}\frac{L}{4} = \frac{73}{512}mL = 0.1426\ mL$$

$$m_3 = m(x_3)\Delta x = m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\right]\frac{L}{4} = \frac{89\,m}{128}\frac{L}{4} = \frac{89}{512}mL = 0.1738\ mL$$

$$m_4 = m(x_4)\Delta x = m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]\frac{L}{4} = \frac{113\,m}{128}\frac{L}{4} = \frac{113}{512}mL = 0.2207\ mL$$

station의 transfer matrix

$$[T_S]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 1 \end{bmatrix} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(b) stiffness coefficients

$$EA_1 = EA(x_1+\frac{\Delta x}{2}) = EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{17}{32}EA = 0.5313\ EA$$

$$EA_2 = EA(x_2+\frac{\Delta x}{2}) = EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}\right)^2\right] = \frac{20}{32}EA = 0.6250\ EA$$

$$EA_3 = EA(x_3+\frac{\Delta x}{2}) = EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{25}{32}EA = 0.7813\ EA$$

$$EA_4 = EA(x_4+\frac{\Delta x}{4}) = EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{15}{16}\right)^2\right] = \frac{353}{256}EA = 1.3789\ EA$$

flexibility influence coefficients $\quad a_i = \frac{\Delta x}{EA_i}$

$$a_1 = \frac{L}{4}\ \frac{32}{17EA} = \frac{8}{17}\frac{L}{EA} = 0.4706\ \frac{L}{EA}$$

$$a_2 = \frac{L}{4}\ \frac{32}{20EA} = \frac{8}{20}\frac{L}{EA} = 0.4000\ \frac{L}{EA}$$

$$a_3 = \frac{L}{4}\ \frac{32}{25EA} = \frac{8}{25}\frac{L}{EA} = 0.3200\ \frac{L}{EA}$$

$$a_4 = \frac{L}{8}\ \frac{256}{353EA} = \frac{32}{353}\frac{L}{EA} = 0.0907\ \frac{L}{EA}$$

field의 transfer matrix

$$[T_F]_i = \begin{bmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(c) transfer matrix

$$[T]_i = [T_F]_i\ [T_S]_i = \begin{bmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 m_i a_i & a_i \\ -\omega^2 m_i & 1 \end{bmatrix}$$

overall transfer matrix

$$[T] = [T]_4\ [T]_3\ [T]_2\ [T]_1$$

[3] trial function $U(x) = \sin\dfrac{\pi(L-x)}{2L}$

$$V_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^L EA(x)\left[\frac{dU(x)}{dx}\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left(-\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos^2\frac{\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi^2 EA}{4L^2}\int_0^L\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\frac{\pi^2 EA}{L^2}\int_0^L\left[1+\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left[1+\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\frac{\pi^2 EA}{L^2}\int_0^L\left[1+\left(\frac{x}{L}\right)^2+\cos\frac{\pi(L-x)}{L}+\left(\frac{x}{L}\right)^2\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\frac{\pi^2 EA}{L^2}\Bigg[\,x+\frac{L}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3+\left(-\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(L-x)}{L}$$

$$+\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(-\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(L-x)}{L}-\left(-\frac{L}{\pi}\right)\left(\frac{2x}{L^2}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right)\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\Bigg]_0^L$$

$$+\left(-\frac{L^2}{\pi^2}\right)\left(\frac{2}{L^2}\right)\left(-\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(L-x)}{L}\Bigg]_0^L$$

$$= \frac{1}{32}\frac{\pi^2 EA}{L^2}\left[\,L+\frac{L}{3}+\left(-\frac{L}{\pi}\right)0\ +\left(-\frac{2}{\pi}\right)(0-0)+\left(\frac{2L}{\pi^2}\right)+\left(\frac{2L}{\pi^3}\right)0\right]$$

$$= \frac{1}{32}\frac{\pi^2 EA}{L}\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{\pi^2}\right)\frac{EA}{L} = 0.4737\ \frac{EA}{L}$$

$$T_{ref} = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\,[\,U(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\sin^2\frac{\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}m\int_0^L\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\frac{1}{2}\left[1-\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}m\int_0^L\left[1+\left(\frac{x}{L}\right)^2-\cos\frac{\pi(L-x)}{L}-\left(\frac{x}{L}\right)^2\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}m\Bigg[\,x+\frac{L}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3-\left(-\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(L-x)}{L}$$

$$-\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(-\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(L-x)}{L}+\left(-\frac{L}{\pi}\right)\left(\frac{2x}{L^2}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right)\cos\frac{\pi(L-x)}{L}\Bigg]_0^L$$

$$-\left(-\frac{L^2}{\pi^2}\right)\left(\frac{2}{L^2}\right)\left(-\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(L-x)}{L}\Bigg]_0^L$$

$$= \frac{1}{8}m\left[\,L+\frac{L}{3}-\left(-\frac{L}{\pi}\right)0\ -\left(-\frac{2}{\pi}\right)(0-0)-\left(\frac{2L}{\pi^2}\right)-\left(\frac{2L}{\pi^3}\right)0\right]$$

$$= \frac{1}{8}mL\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\pi^2}\right)mL = 0.1413\ mL$$

$$\omega_1^2 \approx R(U) = \frac{V_{\max}}{T_{ref}} = \frac{0.4737\,\dfrac{EA}{L}}{0.1413\,mL} = 3.35\ \frac{EA}{mL^2}$$

$$\Rightarrow\quad \omega_1 = 1.831\ \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}$$

[4] $$\phi_1(x) = \sin\frac{\pi(L-x)}{2L} \quad , \quad \phi_2(x) = \sin\frac{3\pi(L-x)}{2L}$$

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} = \frac{-\pi}{2L}\cos\frac{\pi(L-x)}{2L} \quad , \quad \frac{d\phi_2(x)}{dx} = \frac{-3\pi}{2L}\cos\frac{3\pi(L-x)}{2L}$$

(a) mass coefficients $\quad m_{ij} = \int_0^L m(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x)\,dx$

$$m_{11} = \int_0^L m(x)\,\phi_1(x)\,\phi_1(x)\,dx = \int_0^L m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\sin^2\frac{\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

$$m_{12} = \int_0^L m(x)\,\phi_1(x)\,\phi_2(x)\,dx = \int_0^L m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\sin\frac{\pi(L-x)}{2L}\sin\frac{3\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

$$m_{21} = m_{12}$$

$$m_{22} = \int_0^L m(x)\,\phi_2(x)\,\phi_2(x)\,dx = \int_0^L m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\sin^2\frac{3\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

(b) stiffness coefficients $\quad k_{ij} = \int_0^L EA(x)\,\frac{d\phi_i(x)}{dx}\,\frac{d\phi_j(x)}{dx}\,dx$

$$k_{11} = \int_0^L EA(x)\,\frac{d\phi_1(x)}{dx}\,\frac{d\phi_1(x)}{dx}\,dx = \int_0^L EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left(-\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos^2\frac{\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

$$k_{12} = \int_0^L EA(x)\,\frac{d\phi_1(x)}{dx}\,\frac{d\phi_2(x)}{dx}\,dx$$

$$= \int_0^L EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left(-\frac{\pi}{2L}\right)\cos\frac{\pi(L-x)}{2L}\left(-\frac{3\pi}{2L}\right)\cos\frac{3\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

$$k_{21} = k_{12}$$

$$k_{22} = \int_0^L EA(x)\,\frac{d\phi_2(x)}{dx}\,\frac{d\phi_2(x)}{dx}\,dx = \int_0^L EA\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left(-\frac{3\pi}{2L}\right)^2\cos\frac{3\pi(L-x)}{2L}\,dx$$

[5] $h = \dfrac{L}{3}, \quad x_1 = \dfrac{L}{6}, \quad x_2 = \dfrac{L}{2}, \quad x_3 = \dfrac{5L}{6}$

(a) element mass matrix

$$m_1 = m(\frac{L}{6}) = m\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right] = \frac{37}{72}m$$

$$m_2 = m(\frac{3L}{6}) = m\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}\right)^2\right] = \frac{45}{72}m$$

$$m_3 = m(\frac{5L}{6}) = m\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\right] = \frac{61}{72}m$$

$$M_j = \frac{m_j h}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = m_j\frac{L}{18}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$M_1 = \frac{37}{72}m \ \frac{L}{18}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \frac{37}{1296}mL\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$M_2 = \frac{45}{72}m \ \frac{L}{18}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \frac{45}{1296}mL\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$M_3 = \frac{61}{72}m \ \frac{L}{18}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \frac{61}{1296}mL\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

(b) element stiffness matrix

$$EA_1 = EA(\frac{L}{6}) = EA\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right] = \frac{37}{72}EA$$

$$EA_2 = EA(\frac{3L}{6}) = EA\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}\right)^2\right] = \frac{45}{72}EA$$

$$EA_3 = EA(\frac{5L}{6}) = EA\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\right] = \frac{61}{72}EA$$

$$K_j = \frac{EA_j}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = EA_j\frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$K_1 = EA_1\frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{37}{72}EA \ \frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{37}{24}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$K_2 = EA_2\frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{45}{72}EA \ \frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{45}{24}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$K_3 = EA_3\frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{61}{72}EA \ \frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{61}{24}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

(c) global mass matrix

$$M = \frac{1}{1296}mL\begin{bmatrix}2(37) & 37 & 0\\37 & 2(37+45) & 45\\0 & 45 & 2(45+61)\end{bmatrix} = \frac{mL}{1296}\begin{bmatrix}74 & 37 & 0\\37 & 164 & 45\\0 & 45 & 212\end{bmatrix}$$

global stiffness matrix

$$K = \frac{1}{24}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}37 & -37 & 0\\-37 & 37+45 & -45\\0 & -45 & 45+61\end{bmatrix} = \frac{EA}{24L}\begin{bmatrix}37 & -37 & 0\\-37 & 82 & -45\\0 & -45 & 106\end{bmatrix}$$