기 계 진 동 학　　2023년 학기말시험 (가/나반) [28점]　　2023. 6. 8.

1.[1점] 진동억제설계에 관한 다음 문장의 <　>에 적절한 영어 단어를 기입하여라.

(한글 단어는 40% 인정, ①에는 동일한 단어 기입)

The most effective way to reduce unwanted vibration is to stop or modify the <①　　> of the vibration. If this cannot be done, it is sometimes possible to design a vibration <②　　> system to isolate the <①　　> of vibration from the system of interest or to isolate the device from the <①　　> of vibration.

2.[6점] 진동실험에 관한 다음 질문에 답하여라.

(a) 빈 칸에 적절한 장비를 기재하여라.(영문 또는 한글)

① 진동 측정장비 중 가진(excitation)에 사용되는 장비로 내구성(edurance) 시험을 할 수 있다.

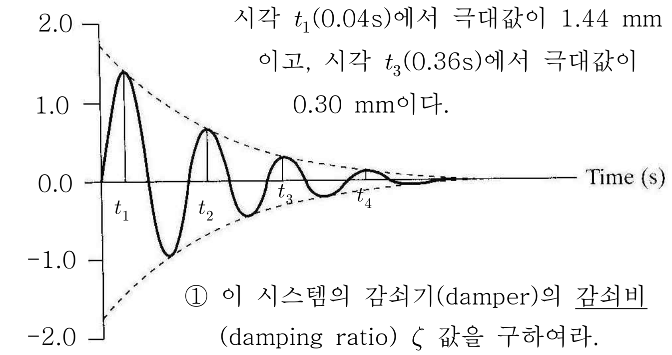
[①　　　　] → 파워증폭기 → 가진기 → 힘변환기

② 진동 응답(response) 측정에 사용되는 장비로 시스템 진단(diagnostics)을 할 수 있다.

가속도계 → 전하증폭기 → [②　　　　]

(b) 압전(piezoelectric) 진동 가속도계(accelerometer)의 사용가능한 진동수 범위에서, 진동 가속도 $\ddot{y}_{\max}$와 전기적 출력 Z에 $Z = \ddot{y}_{\max}/\omega_n^2$ 인 관계가 있다. ① 사용가능한 진동수 상한 범위를 높이는 방안과, ② 그 방안의 단점을 각각 그 근거와 함께 제시하여라.

(c) 1자유도 감쇠계의 2.0 kg 질량체에 충격을 가한 후부터 진동응답을 측정한 결과가 그림과 같다. 시각 t_1(0.04s)에서 극대값이 1.44 mm 이고, 시각 t_3(0.36s)에서 극대값이 0.30 mm이다.



① 이 시스템의 감쇠기(damper)의 감쇠비(damping ratio) ζ 값을 구하여라.

② 이 시스템의 감쇠(damped) 고유진동수 ω_d와 비감쇠(undamped) 고유진동수 ω_n을 구하여라.

3.[3점] 1자유도 감쇠계에서 질량과 강성이 일정할 때에, 감쇠비 ζ 값이 증가함에 따라 계단함수하중 응답(step response)에서 다음 사항의 변화 경향(증가하는지 또는 감소하는지 등)과 그 근거를 제시하여라.

(a) 부족감쇠계($0<\zeta<1$)에서, 정상상태(steady-state)응답

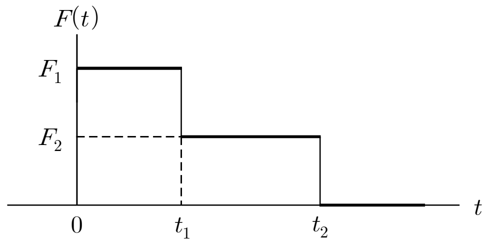
(b) 부족감쇠계($0<\zeta<1$)에서, 오버슛(overshoot)

(c) 과도감쇠계($\zeta>1$)에서, 정착시간(settling time)

4.[4점] 부족감쇠계의 계단함수하중 응답(step response)은 일반적으로 다음 식으로 표현된다.

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\} \qquad (t \ge t_0)$$

비감쇠(undamped)계에 다음 그림과 같이 $t=0$일 때부터 하중이 가해진다. (최종 답은 주어진 기호로 표현함)



(a) 합성곱(convolution)에 의해, $t_1<t<t_2$ 에 관찰되는 응답 $x(t)$를 계산하는 적분 형태의 식을 제시하여라. (적분 계산 불필요)

(b) 위에 주어진 식을 응용하여, t_2시점 이후에 관찰되는 응답 $x(t)$를 표현하여라.

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$L\{\delta(t)\} = 1$,　$L\{1\} = \dfrac{1}{s}$,　$L\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$

$L\{\sin\ at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$,　$L\{\cos\ at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

5.[4점] 다음 운동방정식으로 표현되는 1자유도 비감쇠계의 강제응답 $x_p(t)$를 Laplace변환법으로 구하여라. 시간 영역 $t\geq 0$에 대하여.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \hat{f}_0\,\delta(t-t_1) \qquad (t_1 > 0)$$

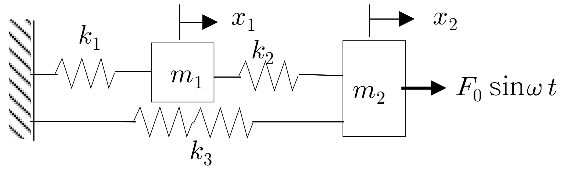
6.[4점] 분포질량이 무시될 만하고 강성이 5000 N/m인 스프링에 8.0 kg 집중 질량체가 매달린 1자유도 감쇠계(감쇠비 ζ = 0.10)가 있다. 질량체에 다음의 주기적 가진력 $F(t)$가 t=0일 때부터 가해진다.

$$F(t) = 12 + \frac{80}{\pi^2}\left[\cos 10t + \frac{1}{9}\cos 30t + \frac{1}{25}\cos 50t + \cdots\right] \ (\mathrm{N})$$

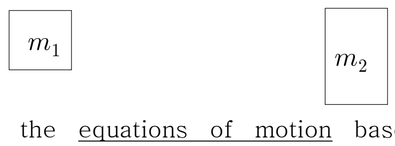
$t\geq 0$인 시간 구간에서 정상상태 응답 변위 $x_p(t)$를 다음과 같이 표현할 때 X_0, X_3, θ_3를 구하여라.

$$x_p(t) = X_0 + X_1\cos(10t-\theta_1) + X_3\cos(30t-\theta_3) + X_5\cos(50t-\theta_5) + \cdots$$

7.[6점] Consider the 2-DOF system shown below.



(a) Draw the free-body diagram for each mass.



(b) Derive the equations of motion based on the Newton's second law of motion, and express the equation in a matrix form. (주어진 기호만으로 표현함)

(c) 질량 m_2인 물체에 가진력 $F_0\sin\omega t$가 가해져 두 물체가 진동할 때, m_2인 물체의 진동이 억제되기 위한 파라미터들(m_1, m_2, k_1, k_2, k_3)과 구동진동수 ω의 관계식을 구하고, 이 때 질량 m_1인 물체의 진폭 X_1을 구하여라.

기 계 진 동 학 　　　 2023년 학기말시험 (가/나반) 　 해 답

1. ① source, 　　 ② isolation

2. (a) ① 신호발생기(signal generator), ② 신호분석기(signal analyzer)
   (b) ① 소형 가속도계를 사용 (∵ 진동수 ω 상한 범위를 높이기 위해 센서 고유진동수 ω_n을 크게 함)
   ② 감도(sensitivity)가 나쁨 (∵ 압전소자가 작아 출력이 작음, ω_n^2이 커서 출력 Z가 작음)
   (c) $m = 2.0$ kg, $t_1 = 0.04$s, $t_3 = 0.36$s, $x(t_1) = 1.44$ mm, $x(t_3) = 0.30$ mm

① $\delta = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_{n+1})} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_3)} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1.44}{0.30} = \dfrac{1}{2}\ln 4.8 = \dfrac{1}{2}(1.5686) = 0.7843$

$\Rightarrow \quad \zeta = \dfrac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \dfrac{0.7843}{\sqrt{4\pi^2+0.7843^2}} = 0.1239$ (또는 $\zeta \approx \dfrac{\delta}{2\pi} = \dfrac{0.7843}{2\pi} = 0.1248$)

② $t_{n+1} - t_1 = n\,T \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{n}(t_{n+1} - t_1) = \dfrac{1}{2}(t_3 - t_1) = \dfrac{1}{2}(0.36 - 0.04)\text{ s} = 0.160\text{ s}$

$\omega_d = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{T} = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{0.160\text{ s}} = 39.27\text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 39.3\text{ rad/s}$

$\omega_n = \dfrac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{39.27\text{ rad/s}}{\sqrt{1-0.1239^2}} = 39.57\text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 39.6\text{ rad/s}$

3. (a) 정상상태(steady-state)응답 x_{ss}가 불변. 근거: $x_{ss} = \dfrac{F_0}{k}$에서, ζ에 영향 받지 않으므로
   (b) 오버슛(overshoot) $O.S.$가 감소. 　 근거: $O.S. = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$에서, ζ가 증가함에 따라 $\dfrac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$가 증가하므로, 음의 지수의 함수가 감소
   (c) 정착시간(settling time) t_s가 증가. 　 근거 : (MATLAB으로 관찰한 그래프 제시)

4. (a) $\zeta = 0$ 일 때 　 $x(t) = \dfrac{F_0}{k}\{1 - \cos[\omega_n(t-t_0)]\} \quad (t \ge t_0)$

$F(t) = F_1\,\Phi(t) - (F_1 - F_2)\,\Phi(t-t_1) - F_2\,\Phi(t-t_2)$ 　 ($\Phi(t)$: Heaviside step function)

$t_1 < t < t_2$ 일 때,

$$x(t) = \frac{1}{m\,\omega_n}\int_0^{t_1} F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{m\,\omega_n}\int_{t_1}^{t} F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{\omega_n F_1}{k}\int_0^{t_1}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \frac{\omega_n F_2}{k}\int_{t_1}^{t}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

   (b) $t > t_2$ 일 때

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$= \frac{F_1}{k}\{1 - \cos\omega_n t\} - \frac{F_1 - F_2}{k}\{1 - \cos[\omega_n(t-t_1)]\} - \frac{F_2}{k}\{1 - \cos[\omega_n(t-t_2)]\}$$

$$= -\frac{F_1}{k}\cos\omega_n t + \frac{F_1 - F_2}{k}\cos[\omega_n(t-t_1)] + \frac{F_2}{k}\cos[\omega_n(t-t_2)]$$

5. $0 \le t \le t_1$ 일 때, $\hat{f}_0\,\delta(t-t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = 0$

$t \ge t_1$ 일 때, 　 $\ddot{x} + \omega_n^2 x = \hat{f}_0\,\delta(t-t_1) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \hat{f}_0\,e^{-t_1 s}$ (t_1 평행이동 필요)

$X(s) = \dfrac{F(s)}{s^2+\omega_n^2}$ 　 　 $F(s) = \hat{f}_0$ 이면

$X(s) = \dfrac{\hat{f}_0}{s^2+\omega_n^2} = \dfrac{\hat{f}_0}{\omega_n}\dfrac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{\hat{f}_0}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right] = \frac{\hat{f}_0}{\omega_n} L^{-1}\left[\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right] = \frac{\hat{f}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

$F(s) = \hat{f}_0 e^{-t_1 s}$ 이므로 $\quad x_p(t) = \dfrac{\hat{f}_0}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_1)$

다른 표현 : $x_p(t) = \dfrac{\hat{f}_0}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_1)\ \Phi(t-t_1)$ $\qquad$ (Φ는 Heaviside step function)

6. k = 5,000 N/m, m = 8.0 kg, ζ = 0.10, ω_T = 10 rad/s

$$\Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5{,}000\ \mathrm{N/m}}{8.0\ \mathrm{kg}}} = 25.0\ \mathrm{rad/s}$$

$F_0(t)$ = 12 N (계단함수 가진)

$$\Rightarrow \quad X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{12\ \mathrm{N}}{5{,}000\ \mathrm{N/m}} = 0.0024\ \mathrm{m} = 2.40\ \mathrm{mm}$$

$$b_3 = \frac{80}{9\pi^2}\ \mathrm{N}$$

$$X_3 = \frac{b_3/m}{\sqrt{[\omega_n^2-(3\omega_T)^2]^2+[2\zeta\omega_n(3\omega_T)]^2}}$$

$$= \frac{80\ \mathrm{N}}{9\pi^2(8.0\ \mathrm{kg})}\ \frac{1}{\sqrt{(25.0^2-(30)^2]^2+[2(0.10)(25.0)(30)]^2}}$$

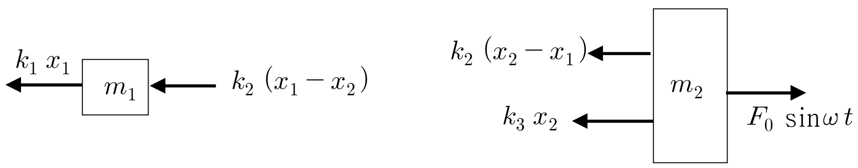
= (0.1126 N/kg) (0.003192 (rad/s)$^{-2}$) = 0.000359 m = 0.359 mm

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n(3\omega_T)}{\omega_n^2-(3\omega_T)^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2(0.10)(25.0)(30)}{25.0^2-(30)^2} = \tan^{-1}(-0.5454) = -0.499\ \mathrm{rad}\ (= -28.6°)$$

$0<\theta<\pi$ 이므로, θ_3 = -0.499 + π = 2.64 rad (= 151.4°)

7. (a) 자유물체도 (F.B.D.)



(b) $m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1-x_2) \quad\Rightarrow\quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1) - k_3x_2 + F_0\sin\omega t$

$\Rightarrow\quad m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = F_0\sin\omega t$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1 \\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ F_0\sin\omega t\end{Bmatrix}$$

(c) $y(t) = Y\sin\omega t$, $\quad x_1(t) = X_1\sin(\omega t-\pi) = -X_1\sin\omega t$, $\quad x_2(t) = X_2\sin\omega t$

$\omega^2 m_1X_1 - (k_1+k_2)X_1 - k_2X_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad (-\omega^2m_1 + k_1+k_2)X_1 - k_2X_2 = 0 \qquad \cdots$ ①

$-\omega^2m_2X_2 + k_2X_1 + (k_2+k_3)X_2 = F_0 \quad\Rightarrow\quad k_2X_1 + (-\omega^2m_2+k_2+k_3)X_2 = F_0 \qquad \cdots$ ②

행렬(matrix) 형태

$$\begin{bmatrix} -\omega^2m_1+k_1+k_2 & -k_2 \\ k_2 & -\omega^2m_2+k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1 \\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ F_0\end{Bmatrix}$$

$X_2 = 0$, $\quad$ ① $\Rightarrow\quad (-\omega^2m_1 + k_1+k_2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}} = \omega$

② $\Rightarrow\quad k_2X_1 = F_0 \quad\Rightarrow\quad X_1 = \dfrac{F_0}{k_2}$