기 계 진 동 학　　2023년 시험2 (가/나반) [28점]　　2022. 5. 4.

1.[2+4점] 조화가진 응답에 관한 물음에 답하여라.

(a) 다음 문장의 < >에 적절한 영어 단어를 기입하여라. (한글 단어는 40% 인정, ①에는 동일한 단어)

The rotating blade causes a harmonic force to be applied to the body of the helicopter.
If the <① > of the blade rotation corresponds to the natural <① > of the body, <② > will occur.

(b) 조화진동 하는 두 음파 $x_1(t)$와 $x_2(t)$를 합성하여 표현한 식은 다음과 같다.

$$\frac{2f_0}{\omega_1^2-\omega_2^2}\ \sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\ \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

같은 종류의 악기(가령, 멜로디온) 2개로 같은 ‘도’(Do, C) 소리를 내니 맥놀이(beat) 현상이 생겼다. 맥놀이가 0.4 s(초) 주기로 반복되었고, 이때 최대 음압이 P이었다. 같은 조건으로 한 옥타브 위의 ‘도’ 소리를 내면(즉, 진동수를 2배로 하면) 맥놀이 주기, 최대 음압은 각각 얼마가 되는가?

2.[4점] 감쇠를 무시할 수 있는 1자유도 계에서 조화가진 진동의 운동방정식이 다음과 같다.

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F_0\ \sin\omega t$$

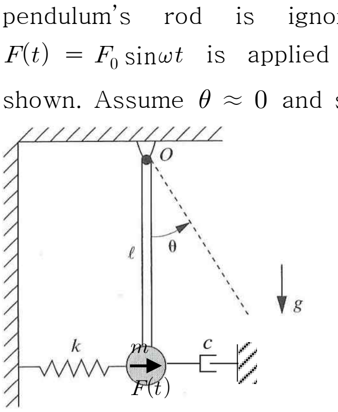
이 미분방정식의 제차해(homogeneous solution)는

$$x_h(t)\ =\ A_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + A_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

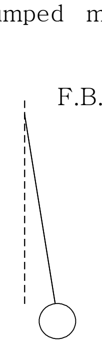
이다. 구동진동수 ω가 $\sqrt{k/m}$과 일치할 때, 미분방정식의 특수해(particular solution) $x_p(t)$를 미정계수법으로 구하는 과정을 보이고, 전체 응답 $x(t)$를 제시하여라. (문제에 주어진 기호만 사용해야 함)

3.[6점] 조화가진 응답에 관한 물음에 답하여라.

(a) A machine part is modeled as a pendulum connected to a spring and a damper. The mass of the pendulum's rod is ignored. A harmonic force $F(t) = F_0\sin\omega t$ is applied to the lumped mass as shown. Assume $\theta \approx 0$ and $\sin\theta \approx \theta$.



F.B.D.



오른쪽 그림에 자유물체도(F.B.D.)를 작성하고, 운동방정식을 유도하여 구한 후, 정상상태(steady-state) 응답 $\theta_p(t)$의 진폭을 주어진 기호들로 표현하여라.

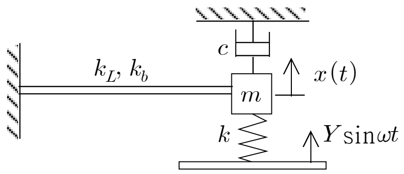
($\Theta\ =\ m_o/\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$ 에 적용)

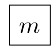
(b) Consider the forced vibration of an undamped 1-DOF system. The response of this system excited by a harmonic sine force is

$$x(t)\ =\ A\ \cos(22\pi t-\phi)\ +\ (5.25\ \text{mm})\ \sin(20\pi t-0.5).$$

If the mass is initially at rest (x_0=0, v_0=0), determine the values of A and ϕ of the total response.

4.[6점] 분포질량과 감쇠를 무시할 만한 탄성 외팔보(cantilever) 끝에 집중질량 m이 있고, 여기에 강성 k인 스프링과 감쇠계수 c인 댐퍼가 그림과 같이 결합되어 있다. 외팔보의 종진동 강성(EA/L)은 k_L, 횡진동 강성($3EI/L^3$)은 k_b이다. 스프링이 연결된 바닥에 변위 $Y\ \sin\omega t$가 가해진다.



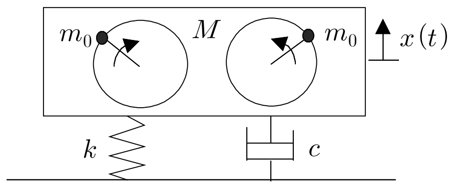


(a) 오른쪽 그림(집중질량체)에 자유물체도(F.B.D.)를 작성하고, 운동방정식을 유도하여 구하여라.

(b) 집중질량체의 응답 변위 $X\sin(\omega t-\theta)$의 진폭 X를 문제에 주어진 기호들로 표현하여라.

(c) 강성 k는 50.0 kN/m, k_L은 40.0 kN/m, k_b는 80.0 kN/m이며, 댐퍼의 감쇠계수 c는 200 kg/s이다. 바닥 가진 진동수가 75.0 Hz이고, 응답 변위 진폭 X가 2.50 mm라고 할 때, 댐퍼를 통해 천정에 전달되는 힘의 크기를 구하여라.

5.[6점] 그림과 같이 전체 질량이 M인 물체 내에서 편심 질량이 각각 m_0인 두 회전체가 회전 반지름 e로서 1분에 N바퀴씩 회전하고 있다. 받침대의 강성과 감쇠를 고려하여, 회전 불균형에 따른 수직방향 진동을 해석한다.



물체의 전체 질량 M이 140 kg이고, 받침대의 강성은 896 kN/m (= 896,000 N/m)이며, 감쇠계수는 1680 kg/s이다. 1분당 회전수 N이 600 rpm일 때, 각 편심질량 회전의 불균형 힘의 크기(즉, 구심력)가 각각 300 N으로 측정되었다.

(a) 편심 회전에 의해 생기는 진동의 변위 진폭 X를 계산하여 구하여라.

(b) 각 편심질량 m_0가 1.4 kg임을 알 때, 회전 반지름 e를 구하여라.

(c) 받침대의 강성 k값을 변화시켜 진폭을 줄이고자 할 때, ① 강성 k값을 증가시키는지 감소시키는지 판단하고, ② 그 판단 근거를 제시하여라.

기 계 진 동 학 　　　 2023년 시험2 (가/나반) 해 답

1. (a) ① frequency, 　② resonance

(b) 주기 $(T_b)_1 = \dfrac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = 0.4$ s, 　최대음압 $(p_{\max})_1 = \dfrac{2f_0}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} = P$

$$(T_b)_2 = \frac{2\pi}{|2\omega_1 - 2\omega_2|} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{1}{2}(T_b)_1 = \frac{1}{2}(0.4\ \text{s}) = 0.2\ \text{s}$$

$$(p_{\max})_2 = \frac{2f_0}{|(2\omega_1)^2 - (2\omega_2)^2|} = \frac{1}{4}\frac{2f_0}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} = \frac{1}{4}(p_{\max})_1 = \frac{1}{4}P$$

2. $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega$ 이므로, $x_h(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t$

표준형 미분방정식 $\ddot{x}(t) + \dfrac{k}{m}x(t) = \dfrac{F_0}{m}\sin\omega t$

미정계수법 $x_p(t) = A_0\, t\cos\omega t + B_0\, t\sin\omega t$

$$\dot{x}_p = A_0(\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) + B_0(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

$$\ddot{x}_p = A_0(-2\omega\sin\omega t - \omega^2 t\cos\omega t) + B_0(2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t)$$

$$[\,A_0(-2\omega\sin\omega t - \omega^2 t\cos\omega t) + B_0(2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t)\,]$$

$$+\frac{k}{m}[A_0\, t\cos\omega t + B_0\, t\sin\omega t] = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$-2\omega A_0 - \omega^2 t B_0 + \frac{k}{m}t B_0 = \frac{F_0}{m} \quad\Rightarrow\quad A_0 = -\frac{F_0}{2m\omega}$$

$$-\omega^2 t A_0 + 2\omega B_0 + \frac{k}{m}t A_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad B_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_p(t) = -\frac{F_0}{2m\omega}t\cos\omega t$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t - \frac{F_0}{2m\omega}t\cos\omega t$$

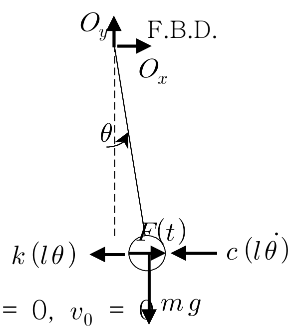
3. (a) $\Sigma M_O = J\ddot{\theta}$ 　$(J = ml^2)$

$$\Rightarrow\ -mg(l\theta) - c(l\dot{\theta})(l) - k(l\theta)(l) + lF(t) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow\ ml\ddot{\theta}(t) + cl\dot{\theta}(t) + (mg + kl)\theta(t) = F_0\sin\omega t$$

표준형 $\ddot{\theta}(t) + \dfrac{c}{m}\dot{\theta}(t) + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta(t) = \dfrac{F_0}{ml}\sin\omega t$

$$\Theta = \frac{m_o}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{F_o/(ml)}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right) - \omega^2\right]^2 + \left(\dfrac{c}{m}\omega\right)^2}}$$



(b) $\omega_n = 22\pi$ rad/s, $X = 5.25$ mm, $\omega = 20\pi$ rad/s, $\theta = 0.5$ rad, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + X\sin(\omega t - \theta),\quad \dot{x}(t) = -\omega_n A\sin(\omega_n t - \phi) + \omega X\cos(\omega t - \theta)$$

$$x(0) = A\cos\phi - X\sin\theta = x_0 = 0$$

$$\Rightarrow\ A\cos\phi = X\sin\theta = (5.25\ \text{mm})\sin(0.5) = 2.517\ \text{mm} > 0 \qquad \cdots ①$$

$$\dot{x}(0) = \omega_n A\sin\phi + \omega X\cos\theta = v_0 = 0$$

$$\Rightarrow\ A\sin\phi = \frac{1}{\omega_n}(-\omega X\cos\theta) = \frac{1}{(22\pi\ \text{rad/s})}[-(20\pi\ \text{rad/s})(5.25\ \text{mm})\cos(0.5)]$$

$= -4.188$ mm < 0 　$\cdots$ ② 　$\sin\phi < 0$, $\cos\phi > 0$ $\Rightarrow$ ϕ 4사분면

$①^2 + ②^2 \Rightarrow A = \sqrt{(2.517\ \text{mm})^2 + (-4.188\ \text{mm})^2} = 4.89$ mm

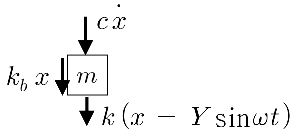
$② \div ① \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\dfrac{-4.188}{2.517} = \tan^{-1}(-1.664) = -1.030$ rad (=-59.0°) 또는 5.25 rad (= 301°)

4. (a) $y(t) = Y \sin\omega t$

$-c\dot{x} - k(x-y) - k_b x = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + (k+k_b)x = kY\sin\omega t$

F.B.D.



(b) 표준형 $\ddot{x} + \dfrac{c}{m}\dot{x} + \dfrac{(k+k_b)}{m}x = \dfrac{k}{m}Y\sin\omega t$

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{\dfrac{k}{m}Y}{\sqrt{\left(\dfrac{k+k_b}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{c}{m}\omega\right)^2}}$$

(c) k = 50.0 kN/m, k_L = 40.0 kN/m, k_b = 80.0 kN/m, c = 200 kg/s, f = 75 Hz, X = 2.50 mm

$\omega = 2\pi f$ = (2π rad) (75 Hz) = 471 rad/s

$F_{tr}(t) = c\dot{x}_p = c\omega X\cos(\omega t - \theta)$

$F_T = c\omega X$ = (200 kg/s) (471 rad/s) (2.50×10^{-3} m) = 236 N

5. M = 140 kg, k = 896 kN/m, c = 1680 kg/s, N = 600 rpm, F_0 = 300 N

(a) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{896\times10^3\ \mathrm{kg/s^2}}{140\ \mathrm{kg}}}$ = 80.0 rad/s, $\omega_r = \dfrac{(2\pi\ \mathrm{rad})(600\ /\mathrm{min})}{60\ \mathrm{s/min}}$ = 62.83 rad/s

$r = \dfrac{62.83}{80.0}$ = 0.7854, $\zeta = \dfrac{1680\ \mathrm{kg/s}}{2\sqrt{(140\ \mathrm{kg})(896\times10^3\ \mathrm{kg/s^2})}}$ = 0.075

$$X = \frac{2m_0 e}{M}\frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_r^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega_r)^2}} = \frac{2F_0}{M}\frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_r^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega_r)^2}} \qquad (m_0 e\,\omega_r^2 = F_0)$$

$$= \frac{2(300\ \mathrm{N})}{(140\ \mathrm{kg})}\frac{1}{\sqrt{(80.0^2-62.83^2)^2+[2(0.0750)(80.0)(62.83)]^2}}$$

= (4.286 m/s^2)/[2,566 (rad/s)^2] = 1.671×10^{-3} m = 1.671 mm

또는

$$X = \frac{2F_0}{M\omega_r^2}\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$= \frac{2(300\ \mathrm{N})}{(140\ \mathrm{kg})(62.83\ \mathrm{rad/s})^2}\frac{0.7854^2}{\sqrt{(1-0.7854^2)^2+[2(0.0750)(0.7854)]^2}}$$

= (1.0856×10^{-3} m) (1.5389) = 1.671×10^{-3} m = 1.671 mm

(b) m_0 = 1.40 kg, F_0 = 300 N, ω_r = 62.83 rad/s

$F_0 = m_0 e\,\omega_r^2$

$\Rightarrow \quad e = \dfrac{F_0}{m_0\omega_r^2} = \dfrac{300\ \mathrm{N}}{(1.40\ \mathrm{kg})(62.83\ \mathrm{rad/s})^2}$ = 54.3×10^{-3} m = 54.3 mm

(c) ① $r\left(= \dfrac{\omega_r}{\omega_n}\right)$을 작게 하기 위해서 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ 을 크게 해야 하므로, 강성 k를 증가시킴.

② $r(\approx 0.8)$ < 1 이므로, 회전불균형 정규화진폭 그래프를 근거로, $r \to 0$이면 진폭을 줄일 수 있음