

1.[2점] 진동실험에 관한 다음 질문에 답하여라.

(a) 인체의 계측계는 ① 감각기관(눈, 귀, 손...) → ② 신경 → ③ 뇌 로 구성된다. 일반적인 계측 시스템도 이와 같이 3단계로 구성할 때, 각 단계의 명칭을 기재하고 이에 해당하는 진동 계측기 사례를 하나씩 제시하여라

① 제1단계 :

② 제2단계 :

③ 제3단계 :

(b) 다음 그림과 설명문에서 XXXXXXXXXX에 공통적인 영어 단어는 무엇인가? (한글 단어는 40% 인정)

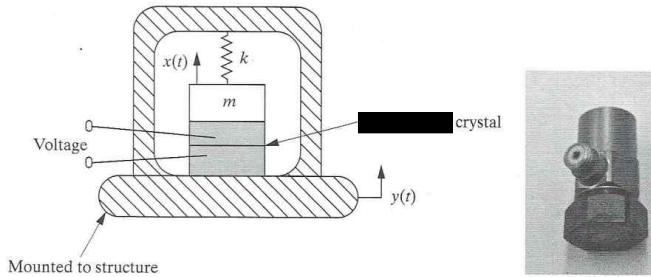
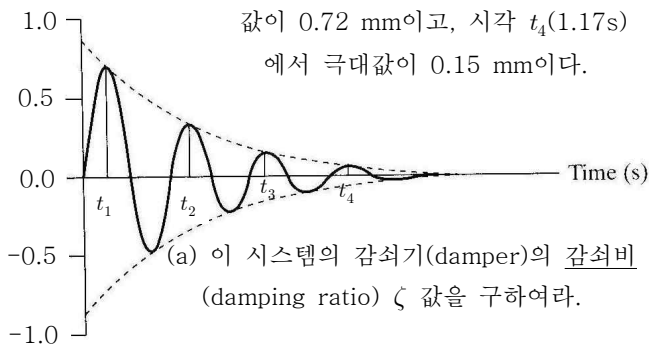


Figure 2.26 A schematic of a XXXXXXXXXX accelerometer and a photograph of a commercially available version.

2.[3점] 1자유도 감쇠계의 2.0 kg 질량체에 51 N 힘을 0.01s 동안 가한 후부터 진동응답을 측정한 결과가 아래 Displacement (mm) 그림과 같다. 시각 t_1 (0.09s)에서 극대값이 0.72 mm이고, 시각 t_4 (1.17s)에서 극대값이 0.15 mm이다.



(a) 이 시스템의 감쇠기(damper)의 감쇠비 (damping ratio) ζ 값을 구하여라.

(b) 이 시스템의 감쇠(damped) 고유진동수 ω_d 와 비감쇠(undamped) 고유진동수 ω_n 를 구하여라.

(c) 충격하중에 의한 응답을 초기조건에 의한 자유진동으로 환산할 때, 초기변위 $x(0)$ 와 초기속도 $\dot{x}(0)$ 는 얼마인가?

3.[3점] 1자유도 감쇠계에서 질량과 강성이 일정할 때에, 감쇠비 ζ 값이 증가함에 따라 계단함수하중 응답(step response)에서 다음 사항의 변화 경향(증가하는지 감소하는지)과 그 근거를 제시하여라.

(a) 부족감쇠계($0 < \zeta < 1$)의 경우, 정점시간(peak time)

(b) 부족감쇠계($0 < \zeta < 1$)의 경우, 정착시간(settling time)

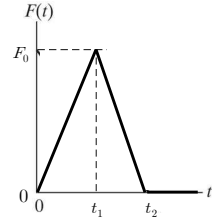
(c) 과도감쇠계($\zeta > 1$)의 경우, 정착시간(settling time)

4.[6점] 1자유도계에 다음과 같이 가진력 $F(t)$ 가 가해진다.

$$0 \leq t < t_1 \text{ 에서 } F(t) = F_0 \frac{t}{t_1}$$

$$t_1 \leq t < t_2 \text{ 에서 } F(t) = F_0 \frac{(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)}$$

$$t \geq t_2 \text{ 에서 } F(t) = 0$$



(a) 질량이 m 이고 고유진동수가 ω_n 인 비감쇠(undamped)계 경우, $0 \leq t < t_1$ 구간에서 응답 $x(t)$ 를 계산하여 구하여라.

(b) 질량이 m , 비감쇠고유진동수가 ω_n , 감쇠고유진동수가 ω_d , 감쇠비가 ζ 인 부족감쇠(underdamped)계 경우, $t \geq t_2$ 구간에서 응답 $x(t)$ 를 구하기 위한 합성곱 적분 (convolution integral)식을 제시하여라. (적분 계산 불필요)

5.[4점] 다음 운동방정식으로 표현되는 1 자유도 비감쇠계의 강제응답 $x_p(t)$ 를 Laplace 변환법으로 구하여라.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_1 e^{-at} \quad (t > 0, a > 0)$$

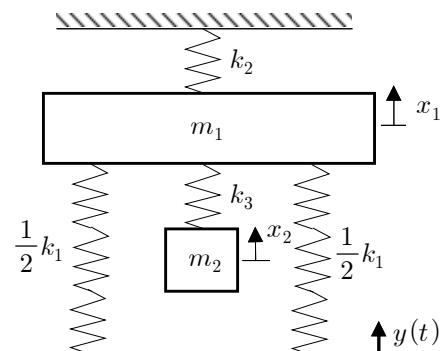
6.[4점] 분포질량이 무시될 만하고 강성이 4050 N/m인 스프링에 2.0 kg 집중 질량체가 매달린 1자유도 감쇠계(감쇠비 $\zeta = 0.10$)가 있다. 질량체에 다음의 주기적 가진력 $F(t)$ 가 $t=0$ 일 때부터 가해진다.

$$F(t) = 42 + \frac{50}{\pi} [\sin 5t + \frac{1}{2} \sin 10t + \frac{1}{3} \sin 15t + \dots] \quad (\text{N})$$

$t \geq 0$ 인 시간 구간에서 정상상태 응답 변위 $x_p(t)$ 를 다음과 같이 표현할 때 X_0 , X_3 , θ_3 를 구하여라.

$$x_p(t) = X_0 + X_1 \sin(5t - \theta_1) + X_2 \sin(10t - \theta_2) + X_3 \sin(15t - \theta_3) + \dots$$

7.[6점] 질량이 m_1 인 테이블 판이 등가강성 k_1 인 스프링 받침 위에 놓여 있고, 상부에 강성 k_2 인 스프링으로 지탱되며, 바닥의 진동변위 $y(t)$ 에 의해 진동한다. 테이블 판의 진동을 저감시키기 위해 질량 m_2 와 강성 k_3 인 스프링으로 이루어진 1자유도계를 그림과 같이 테이블에 매단다. 중력은 결과에 영향을 주지 않으므로 고려하지 않는다.



(a) 두 질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 각각 그려라.

(b) $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 로 표현되는 운동방정식을 유도해 구한 후, 행렬(matrix)형태로 표현하여라. (주어진 기호로 표현함)

(c) 바닥에 조화진동 변위 $Y \sin \omega t$ 가 있을 때, 질량 m_1 인 물체의 진동을 억제하는 방안을 주어진 기호들로써 표현하여라.

1. (a) ① 센서-변환기(sensor-transducer) 단계 : 진동 가속도계(accelerometer)
 ② 신호 조정(signal conditioning) 단계 : 전하 증폭기 (charge amplifier), conditioning amplifier
 ③ 판독-기록(reading-recording) 단계 : volt meter, oscilloscope, signal analyzer, computer 등
 (b) piezoelectric (압전 壓電)

2. $m = 2.0 \text{ kg}$, $t_1 = 0.09 \text{ s}$, $t_4 = 1.17 \text{ s}$, $x(t_1) = 0.72 \text{ mm}$, $x(t_4) = 0.15 \text{ mm}$, $F = 51 \text{ N}$, $\Delta s = 0.01 \text{ s}$

$$(a) \quad \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_{n+1})} = \frac{1}{3} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_4)} = \frac{1}{3} \ln \frac{0.72}{0.15} = \frac{1}{3} \ln 4.8 = \frac{1}{3} (1.5686) = 0.523$$

$$\Rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.523}{\sqrt{4\pi^2 + 0.523^2}} = 0.0830 \quad (\text{또는 } \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.523}{2\pi} = 0.0832)$$

$$(b) \quad t_{n+1} - t_1 = n T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{n}(t_{n+1} - t_1) = \frac{1}{3}(t_4 - t_1) = \frac{1}{3}(1.17 - 0.09) \text{ s} = 0.360 \text{ s}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi \text{ rad}}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0.36 \text{ s}} = 17.453 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 17.45 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{17.453 \text{ rad/s}}{\sqrt{1 - 0.0830^2}} = 17.511 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 17.51 \text{ rad/s}$$

$$(c) \quad \hat{F} = F \Delta s = (51 \text{ N}) (0.01 \text{ s}) = 0.51 \text{ N}\cdot\text{s}$$

$$\hat{F} = m \dot{x}(0) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = \frac{\hat{F}}{m} = \frac{0.51 \text{ N} \cdot \text{s}}{2.0 \text{ kg}} = 0.255 \text{ m/s}, \quad x(0) = 0$$

3. (a) 정점시간(peak time) t_p 가 증가. 근거: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ 에서 $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$ 이 감소하므로
 (b) 정착시간(settling time) t_s 가 감소. 근거: $t_s \approx \frac{3.5}{\zeta \omega_n}$ 에서 ζ 가 증가하므로
 (c) 정착시간(settling time) t_s 가 증가. 근거 : (MATLAB으로 관찰한 그래프 제시)

4. (a) $0 \leq t < t_1$, $\zeta = 0$

$$\begin{aligned} \text{방법① } x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin\omega_n(t-\tau) d\tau = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \frac{\tau}{t_1} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n t_1} \int_0^t \tau \sin\omega_n(t-\tau) d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n t_1} \left\{ \left[\tau \frac{1}{\omega_n} \cos\omega_n(t-\tau) \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{\omega_n} \cos\omega_n(t-\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2 t_1} \left\{ [t \cos\omega_n(0) - 0] - \left[\frac{-1}{\omega_n} \sin\omega_n(t-\tau) \right]_0^t \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2 t_1} \left\{ t + \frac{1}{\omega_n} [\sin\omega_n(0) - \sin\omega_n t] \right\} = \frac{F_0}{m\omega_n^2 t_1} \left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin\omega_n t \right) \end{aligned}$$

방법② $0 < t - \tau < t \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau < t$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(t-\tau) \sin\omega_n \tau d\tau = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \frac{(t-\tau)}{t_1} \sin\omega_n \tau d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n t_1} \int_0^t (t-\tau) \sin\omega_n \tau d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n t_1} \left\{ \left[(t-\tau) \frac{-1}{\omega_n} \cos\omega_n \tau \right]_0^t - \int_0^t (-1) \frac{-1}{\omega_n} \cos\omega_n \tau d\tau \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n t_1} \left\{ \left[0 - t \frac{-1}{\omega_n} \cos\omega_n(0) \right] - \frac{1}{\omega_n^2} [\sin\omega_n \tau]_0^t \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2 t_1} \left\{ t - \frac{1}{\omega_n} [\sin\omega_n t - \sin\omega_n(0)] \right\} = \frac{F_0}{m\omega_n^2 t_1} \left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin\omega_n t \right) \end{aligned}$$

(b) $t \geq t_2, 0 < \zeta < 1$

$$\begin{aligned} \text{방법 ① } x(t) &= \frac{1}{m\omega_d} \left\{ \int_0^{t_1} F_0 \frac{\tau}{t_1} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} F_0 \frac{t_2-\tau}{t_2-t_1} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d} \left\{ \int_0^{t_1} \frac{\tau}{t_1} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2-\tau}{t_2-t_1} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\text{방법 ② } 0 < t - \tau < t_1 \Rightarrow t - t_1 < \tau < t, \quad t_1 < t - \tau < t_2 \Rightarrow t - t_2 < \tau < t - t_1$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_d} \left\{ \int_{t-t_1}^t F_0 \frac{t-\tau}{t_1} e^{-\zeta\omega_n\tau} \sin\omega_d\tau d\tau + \int_{t-t_2}^{t-t_1} F_0 \frac{t_2-(t-\tau)}{t_2-t_1} e^{-\zeta\omega_n\tau} \sin\omega_d\tau d\tau \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d} \left\{ \int_{t-t_1}^t \frac{t-\tau}{t_1} e^{-\zeta\omega_n\tau} \sin\omega_d\tau d\tau + \int_{t-t_2}^{t-t_1} \frac{t_2-t+\tau}{t_2-t_1} e^{-\zeta\omega_n\tau} \sin\omega_d\tau d\tau \right\} \end{aligned}$$

5. $\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_1 e^{-at}$

[연습 3.41에서 $c=0$ (즉 $\zeta=0$)인 경우에 해당]

$$\Rightarrow L \Rightarrow s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_1 \frac{1}{s+a}$$

$$(s^2 + \omega_n^2) X(s) = f_1 \frac{1}{s+a} \Rightarrow X(s) = f_1 \frac{1}{(s^2 + \omega_n^2)(s+a)}$$

$$X(s) = f_1 \left[\frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega_n^2} \right]$$

$$A(s^2 + \omega_n^2) + (Bs+C)(s+a) = 1$$

$$A + B = 0, \quad aB + C = 0, \quad \omega_n^2 A + aC = 1$$

$$\rightarrow B = -A, \quad -aA + C = 0, \quad \omega_n^2 A + a^2 A = 1$$

$$A = \frac{1}{\omega_n^2 + a^2}, \quad B = -\frac{1}{\omega_n^2 + a^2}, \quad C = \frac{a}{\omega_n^2 + a^2}$$

$$X(s) = \frac{f_1}{\omega_n^2 + a^2} \left[\frac{1}{s+a} - \frac{s-a}{s^2 + \omega_n^2} \right] = \frac{f_1}{\omega_n^2 + a^2} \left[\frac{1}{s+a} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{a}{\omega_n} \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right]$$

$$x_p(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{f_1}{\omega_n^2 + a^2} (e^{-at} - \cos\omega_n t + \frac{a}{\omega_n} \sin\omega_n t)$$

6. $k = 4050 \text{ N/m}, \quad m = 2.0 \text{ kg}, \quad \zeta = 0.10, \quad \omega_T = 5 \text{ rad/s}$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4,050 \text{ N/m}}{2.0 \text{ kg}}} = 45.0 \text{ rad/s}$$

$F_0(t) = 42 \text{ N}$ (계단함수 가진)

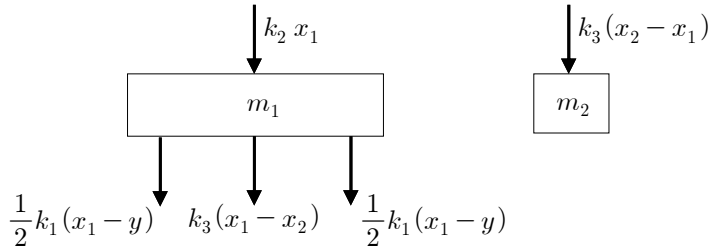
$$\Rightarrow X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{42 \text{ N}}{4,050 \text{ N/m}} = 0.01037 \text{ m} = 10.37 \text{ mm}$$

$$b_3 = \frac{50}{3\pi} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{b_3/m}{\sqrt{[\omega_n^2 - (3\omega_T)^2]^2 + [2\zeta\omega_n(3\omega_T)]^2}} \\ &= \frac{50}{3\pi(2.0)} \frac{1}{\sqrt{(45.0^2 - (15)^2)^2 + [2(0.10)(45.0)(15)]^2}} \\ &= (2.653 \text{ N/kg}) (0.000554 \text{ (rad/s)}^{-2}) = 0.001470 \text{ m} = 1.470 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n(3\omega_T)}{\omega_n^2 - (3\omega_T)^2} \\ &= \tan^{-1} \frac{2(0.10)(45.0)(15)}{45.0^2 - (15)^2} = \tan^{-1}(0.0750) = 0.0749 \text{ rad} (= 4.29^\circ) \end{aligned}$$

7. (a) 자유물체도 (F.B.D.)



$$\begin{aligned}
 \text{(b) } m_1 \ddot{x}_1(t) &= -k_1 [x_1(t) - y(t)] - k_2 x_1 - k_3 [x_1(t) - x_2(t)] \\
 &\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2 + k_3) x_1(t) - k_3 x_2(t) = k_1 y(t) \\
 m_2 \ddot{x}_2(t) &= -k_3 [x_2(t) - x_1(t)] \\
 &\Rightarrow m_2 \ddot{x}_2(t) - k_3 x_1(t) + k_3 x_2(t) = 0
 \end{aligned}$$

행렬(matrix) 형태

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 y(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{(c) } y(t) = Y \sin \omega t, \quad x_1(t) = X_1 \sin \omega t, \quad x_2(t) = X_2 \sin \omega t$$

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 m_1 X_1 + (k_1 + k_2 + k_3) X_1 - k_3 X_2 &= k_1 Y \quad \Rightarrow \quad (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 + k_3) X_1 - k_3 X_2 = k_1 Y \\
 -\omega^2 m_2 X_2 - k_3 X_1 + k_3 X_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad -k_3 X_1 + (-\omega^2 m_2 + k_3) X_2 = 0
 \end{aligned}$$

행렬(matrix) 형태

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & -\omega^2 m_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 Y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k_1 Y & -k_3 \\ 0 & -\omega^2 m_2 + k_3 \end{vmatrix} = \frac{k_1 Y}{D} (-\omega^2 m_2 + k_3) = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2 m_2 + k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k_3}{m_2}} = \omega$$