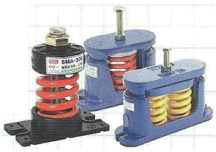
기 계 진 동 학 2021년 시험2 (가/나/다반) [28점] 2021. 5. 4.

1.[2+1+2점] 조화가진응답에 관한 다음 질문에 답하여라.

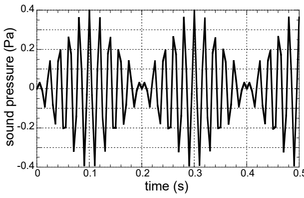
(a) 진동 차단용 방진 장치의 사례들이 사진에 보여 있다. 스프링이 들어있는 이유를 설명하여라.
(감쇠 무시, 이론적 근거와 그래프 제시)



(b) 다음 문장의 < >에 적절한 영어 표현을 기입하여라.
(한글 단어는 40% 인정)

The total solution is the sum of the particular solution and the homogeneous solution. Note that for large values of time, the homogeneous solution approaches zero and the total solution approaches the particular solution. Thus the particular solution is called the < > response and the homogeneous solution is called the < > response.

(c) 조화진동 하는 두 음파 $x_1(t)$와 $x_2(t)$를 합성하여 그래프로 나타내니 다음과 같다. $x_1(t)$의 진동수가 50 Hz라면 $x_2(t)$의 진동수는 몇 Hz인가?



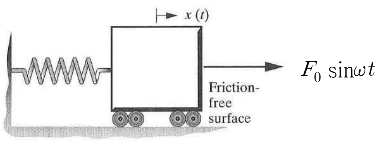
2.[4점] 감쇠를 무시할 수 있는 1자유도 계에서 조화가진 진동의 운동방정식을 표준형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2\, x(t) = f_1 \sin\omega t + f_2 \cos\omega t$$

이 미분방정식의 제차해(homogeneous solution)은 다음과 같다. $x_h(t) = A_1 \sin\omega_n t + B_1 \cos\omega_n t$

구동진동수 ω가 고유진동수 ω_n과 일치할 때, 미분방정식의 특수해 $x_p(t)$를 유도하여 구하여라.

3.[2+3점] Consider the forced vibration of an undamped 1-DOF system (without damping). The harmonic sine force is $F(t) = F_0 \sin\omega t$. The system has a mass 0.700 kg connected to a spring of stiffness 28.0 kN/m (= 28,000 N/m).



(a) The mass is driven by a 63.0 N harmonic force at 45 Hz (90π rad/s). Determine the amplitude X and phase θ of the response $x_p(t) = X\sin(\omega t - \theta)$.

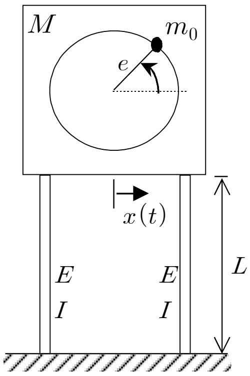
(b) If the response $x_p(t)$ is

$$x_p(t) = (7.65\text{ mm})\ \sin(20\pi\, t)$$

and the mass is initially at rest (x_0=0, v_0=0), determine the amplitude A and phase ϕ of the total response

$$x(t) = A\sin(\omega_n t + \phi) + x_p(t).$$

4.[8점] 그림과 같이 전체 질량이 M인 강체 내에서 편심질량이 m_0인 회전체가 회전 반지름 e로서 1분에 N바퀴씩 회전한다. 강체는 바닥에 고정된 2개의 기둥 위에 결합되어 수평방향으로 진동한다. 외팔보(cantilever)로 간주되는 기둥은 길이 L, 탄성계수 E, 단면의 면적관성모멘트 I이고, 감쇠는 무시된다.



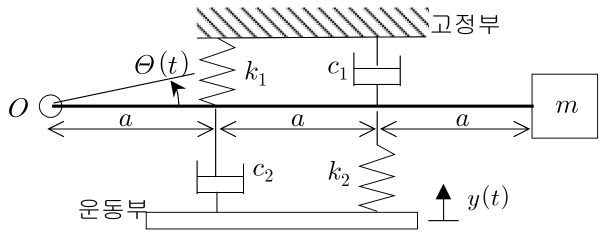
(a) 두 기둥의 등가 스프링상수 k_{eq}를 표현하고, 기호 k_{eq}를 포함하여 자유물체도(free-body diagram)를 완성하여라.

(b) 뉴튼의 운동 제2법칙에 따라서 운동방정식을 유도하여 구하여라. (최종 결과에는 주어진 기호만 사용해야 함)

(c) 회전불균형으로 인한 진동 응답을 나타내는 해 $x_p(t)$를 제시하여라. (solving 불필요, 최종 결과에는 주어진 기호만 사용해야 함)

(d) 회전수 N이 일정할 때, 회전불균형으로 인한 진동의 진폭을 줄이는 설계 방안을 두 가지 (① 최선책, ② 차선책) 제시하여라. (주어진 기호를 사용하여 서술)

5.[6점] 수평면(중력에 수직인 면)에서 진동하는 1자유도계가 그림에 보여 있다. 길이 $3a$인 강체 막대는 질량이 무시되고 힌지(hinge)된 O지점을 중심으로 회전 진동을 한다. 막대 끝의 집중 질량체는 부피가 무시되고 질량은 m이다. 1번 감쇠기(damper)와 스프링은 고정부에 연결되어 있고, 2번 감쇠기와 스프링이 연결된 운동부의 작은 진동 변위 $y(t)$로 인해 막대가 진동한다. 막대의 각 변위를 $\Theta(t)$라고 표기한다.



(a) 막대에 가해지는 힘들을 나타내는 자유물체도(free-body diagram)를 완성하여라. (주어진 기호로 표기)

(b) 바닥의 진동 변위가 $Y\sin\omega t$일 때, 운동방정식을 유도하여 구하여라. (최종 결과에는 주어진 기호만 사용해야 함)

(c) k_1 = 3,000 N/m, k_2 = 2,500 N/m, c_1 = 250 kg/s, c_2 = 300 kg/s, m = 40.0 kg이고, 거리 a는 0.04 m 이며, 바닥의 진동 변위 $y(t) = Y\ \sin\omega t$ 일 때, 응답 $\Theta(t)$는 다음과 같다.

$$\Theta(t) = (0.05\text{ rad})\ \sin(20t - 1.14)$$

감쇠기와 스프링을 통해 고정부에 전달되는 힘의 크기는 몇 N인가?

기 계 진 동 학   2021년 시험2 (가/나/다반)   해 답

1. (a) 바닥가진 변위전달률 $\dfrac{X_b}{Y} = \dfrac{1}{|1-r^2|}$ 그래프에서,

   전달률 X_b/Y를 작게 하기 위해

   스프링으로 강성 k를 작게 하여 고유진동수 $\omega_n(=\sqrt{k/m})$를 작게 하여

   진동수 비 $r(=\omega/\omega_n)$을 크게 함

   (b) steady-state,   transient

   (c) 그래프에서 맥놀이 주기 T_b = 0.20 s

$$T_b = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \qquad f_2 = f_1 \pm \frac{1}{T_b} = (50\ \text{Hz}) \pm \frac{1}{(0.20\ \text{s})} = 45\ \text{Hz 또는 } 55\ \text{Hz}$$

2. $x_p(t) = A_0\ t\ \sin\omega t + B_0\ t\ \cos\omega t$

$$\dot{x}_p = A_0\ (\sin\omega t + \omega t\ \cos\omega t\ ) + B_0\ (\cos\omega t - \omega t\ \sin\omega t)$$

$$\ddot{x}_p = A_0\ (2\omega\ \cos\omega t - \omega^2 t\ \sin\omega t) + B_0\ (-2\omega\ \sin\omega t - \omega^2 t\ \cos\omega t)$$

$$[\ A_0\ (2\omega\ \cos\omega t - \omega^2 t\ \sin\omega t) + B_0\ (-2\omega\ \sin\omega t - \omega^2 t\ \cos\omega t)\ ]$$

$$+\ \omega^2\ [A_0\ t\ \sin\omega t + B_0\ t\ \cos\omega t] = f_1\ \sin\omega t + f_2\ \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \qquad 2\ \omega\ A_0 = f_2, \quad -2\ \omega\ B_0 = f_1$$

$$\Rightarrow \qquad A_0 = \frac{f_2}{2\omega}, \qquad B_0 = -\frac{f_1}{2\omega}$$

$$\Rightarrow \qquad x_p(t) = \frac{f_2}{2\omega} t\ \sin\omega t - \frac{f_1}{2\omega}\ t\ \cos\omega t$$

3. m = 0.700 kg, c = 0, k = 28,000 N/m

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{28{,}000\ \text{N/m}}{0.700\ \text{kg}}} = 200\ \text{rad/s}$$

   (a) F_0 = 63.0 N, $\omega = 90\pi$ rad/s = 282.7 rad/s

   $\omega_n < \omega$ 이므로, $\theta = \pi$ rad

$$f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{63.0\ \text{N}}{0.700\ \text{kg}} = 90.0\ \text{m/s}^2$$

$$X = \frac{f_0}{|\omega_n^2 - \omega^2|} = \frac{90.0\ \text{m/s}^2}{|200^2 - 282.7^2|\ \text{rad}^2/\text{s}^2} = 2.25\times10^{-3}\ \text{m} = 2.25\ \text{mm}$$

   (b) $x_p(t) = X\ \sin\omega t = (7.65\ \text{mm})\ \sin(20\pi t)$ X = 7.65 mm, $\omega = 20\pi$ rad/s

$$x(t) = A\ \sin(\omega_n t + \phi) + X\ \sin\omega t, \qquad \dot{x}(t) = \omega_n A\ \cos(\omega_n t + \phi) + \omega X\ \cos\omega t$$

$$x(0) = A\ \sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = 0$$

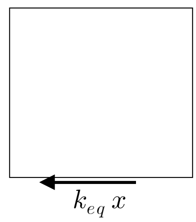
$$\dot{x}(0) = \omega_n A\ \cos\phi + \omega X = 0 \quad \Rightarrow \quad A\ \cos\phi = -\frac{\omega}{\omega_n} X = -\frac{20\pi}{200}\ (7.65\ \text{mm}) = -2.40\ \text{mm} \quad < 0$$

   $\sin\phi = 0$ 이고 $\cos\phi < 0$ $\Rightarrow$ $\phi = \pi$ (rad)

   $A\ \cos\phi = A\ \cos\pi = -A = -2.40$ mm $\Rightarrow$ A = 2.40 mm

4. (a) $k_1 = k_2 = \dfrac{3EI}{L^3}$, $k_{eq} = k_1 + k_2 = \dfrac{6EI}{L^3}$

F.B.D.



(b) $\omega_r = \dfrac{2\pi N}{60}$ rad/s

$$-k_{eq}\,x = (M - m_0)\,\ddot{x} + m_0\,\frac{d^2}{dt^2}(x + e\cos\omega_r t)$$

$$= M\ddot{x} - m_0\,\ddot{x} + m_0\,\ddot{x} - m_0\,e\,\omega_r^2\cos\omega_r t$$

$$\Rightarrow\quad M\ddot{x} + k_{eq}\,x = m_0\,e\,\omega_r^2\cos\omega_r t \qquad \Rightarrow \qquad M\ddot{x} + \frac{6EI}{L^3}\,x = m_0\,e\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2\cos\frac{2\pi N}{60}t$$

(c) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{M}} = \sqrt{\dfrac{6EI}{ML^3}}$, $\zeta = 0$

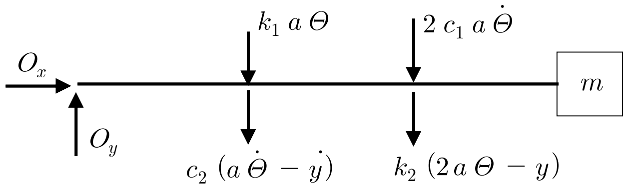
$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2}\cos\omega_r t = \frac{\dfrac{m_0 e}{M}\left(\dfrac{2\pi N}{60}\right)^2}{\dfrac{6EI}{ML^3} - \left(\dfrac{2\pi N}{60}\right)^2}\cos\frac{2\pi N}{60}t$$

(d) 진폭의 분모 $\dfrac{6EI}{ML^3} - \left(\dfrac{2\pi N}{60}\right)^2$을 매우 크게 하는 방안으로

1) $\dfrac{6EI}{ML^3}$을 매우 크게 하기 위하여 E 또는 I를 매우 크게 하거나 M 또는 L을 매우 작게 함

2) $\dfrac{6EI}{ML^3}$을 매우 작게 하기 위하여 E 또는 I를 매우 작게 하거나 M 또는 L을 매우 크게 함

5. (a) 자유물체도



(b) $\Sigma M_O = I_O\,\ddot{\Theta}$, $I_O = m\,(3a)^2 = 9\,m\,a^2$, $y(t) = Y\sin\omega t$

$$-a\;k_1 a\Theta - 2a\,(2\,c_1\,a\,\dot{\Theta}) - a\,[c_2\,(a\,\dot{\Theta} - \dot{y})] - 2a\,[k_2\,(2\,a\,\Theta - y)] = 9\,m\,a^2\,\ddot{\Theta}$$

$$\Rightarrow\quad 9\,m\,a^2\,\ddot{\Theta} + 4\,c_1\,a^2\,\dot{\Theta} + c_2\,a^2\,\dot{\Theta} + k_1\,a^2\,\Theta + 4\,k_2\,a^2\,\Theta = c_2\,a\,\dot{y} + 2\,k_2\,a\,y$$

$$\Rightarrow\quad 9\,m\,a\,\ddot{\Theta} + (4\,c_1 + c_2)\,a\,\dot{\Theta} + (k_1 + 4\,k_2)\,a\,\Theta = \omega\,c_2\,Y\cos\omega t + 2\,k_2\,Y\sin\omega t$$

(c) $k_1 = 3{,}000$ N/m, $c_1 = 250$ kg/s, $a = 0.04$ m

$\Theta(t) = X\,\sin(\omega t - \theta)$ $\qquad X = 0.05$ rad, $\omega = 20$ rad/s

$$F_{tr}(t) = k_1\,a\,\Theta + c_1\,(2a)\,\dot{\Theta} = k_1\,a\;X\,\sin(\omega t - \theta) + 2\,c_1\,a\;\omega\;X\cos(\omega t - \theta)$$

$$F_T = \sqrt{k_1^2 + (2\,c_1\,\omega)^2}\;a\,X = \sqrt{(3{,}000\ \mathrm{N/m})^2 + [2\,(250\ \mathrm{kg/s})\,(20\,\mathrm{rad/s})]^2}\;(0.04\ \mathrm{m})\,(0.05\ \mathrm{rad})$$

$$= (10{,}440\ \mathrm{N/m})\,(0.04\ \mathrm{m})\,(0.05\ \mathrm{rad}) = 20.9\ \mathrm{N}$$