기 계 진 동 학　　2020년 학기말시험 (가/나/다반)　[82점]　　2020. 6. 12.

1.[6점] 진동에 관한 다음 물음에 답하여라.

(a) 역학적 진동(mechanical vibrations)을 '부정적 진동'과 '긍정적 진동'으로 구분하여 사례를 각각 5개씩 제시하여라.

① 부정적 진동 :

② 긍정적 진동 :

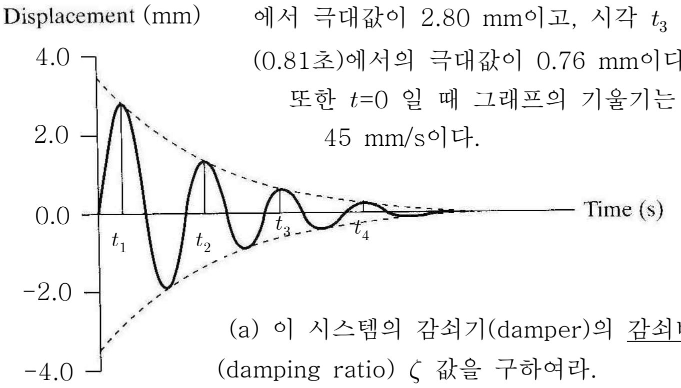
(b) 다음 문장의 (　)에 적절한 영어 단어를 기입하여라.
[한글 단어는 50% 인정]

① Vibration is the subdiscipline of dynamics that deals with (　　　　　　　) motion.

② Design in vibration refers to adjusting the physical parameters of a device to cause its vibration response to meet a specified (　　　　　　　) or (　　　　　　　) criteria.

(c) 음압레벨(SPL, sound pressure level)이 99.1 dB인 소음의 음압 p_A와 81.0 dB인 소음의 음압 p_B의 비율 p_A/p_B는 얼마인가? (최종 답은 유효숫자 2자리로 제시함)

2.[9점] 1자유도 감쇠계의 질량체(5.2 kg)에 충격하중을 가한 후 진동응답을 측정한 결과가 그림과 같다. 시각 t_1(0.09초)에서 극대값이 2.80 mm이고, 시각 t_3(0.81초)에서의 극대값이 0.76 mm이다. 또한 t=0 일 때 그래프의 기울기는 45 mm/s이다.



(a) 이 시스템의 감쇠기(damper)의 감쇠비(damping ratio) ζ 값을 구하여라.

(b) 이 시스템의 비감쇠(undamped) 고유진동수 ω_n을 구하여라.

(c) 자유진동을 일으킨 충격하중의 충격량은 몇 N□인가?

3.[8점] Consider a 1-DOF (degree-of-freedom) spring-mass-damper system.

(a) The free response has the following form.

$$x(t) = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\,\sin(\omega_d t + \phi)$$

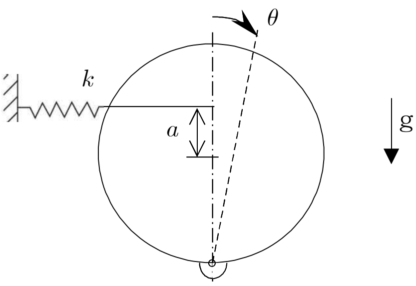
For the system with the undamped natural frequency ω_n = 2050 rad/s and the damping ratio ζ = 0.275, determine the amplitude A in mm and phase ϕ in radian when the initial displacement x_0 is -6.80 mm and the initial velocity v_0 is 0.

(b) Another system has a mass 0.750 kg connected to a spring of stiffness 2.85 kN/m (= 2,850 N/m) and a damper of coefficient 27.0 kg/s. The mass is driven by a 35.0 N harmonic force at 13 Hz (26π rad/s). The response of a harmonic sine force is

$$x(t) = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\phi) + X\sin(\omega t-\theta)\ .$$

Determine the amplitude X and phase delay θ of the steady-state response.

4.[9점] 질량 m이고 반지름이 R인 균일 원판이 도립진자(inverted pendulum)를 형성하고, 원판 중심에서 a 만큼 떨어진 지점에 강성 k인 스프링이 그림과 같이 결합되어 있다. 진자의 각변위 θ가 작아서 $\sin\theta \approx \theta$로 간주된다. 균일 원판의 질량관성모멘트는 중심에 관하여 $(1/2)mR^2$, 가장자리 점에 관하여 $(3/2)mR^2$이다. θ=0에서 스프링에 변형이 없다.



(a) 주어진 기호들로 운동에너지 T와 위치에너지 U를 표현하여라. (평형 위치를 기준으로 함)

(b) 에너지 방법으로 모델링하여 운동방정식을 유도하여라.

(c) 이 시스템의 응답이 안정(stable)하게 진동하는 조건을 제시하고, 그 때의 고유진동수 ω_n을 주어진 기호로 표현하여라.

5.[8점] 강제진동 응답에 관한 다음 질문에 답하여라.

(a) 조화가진에 의한 비감쇠 구조물의 응답에서 발생할 수 있는 공진(resonance) 현상에서 구조물의 내부에 에너지가 보존되는지 여부와 그 이유를 서술하여라.

(b) 사진에 보인 바와 같이, 회전형 송풍기가 지면에 설치되는 부분에 스프링으로 받쳐져 있다. 볼트/너트로 견고하게 고정하지 않고 스프링으로 유연하게 설치하면 진동 관점에서 장점이 무엇이고 그 근거는 무엇인지를 서술하여라.

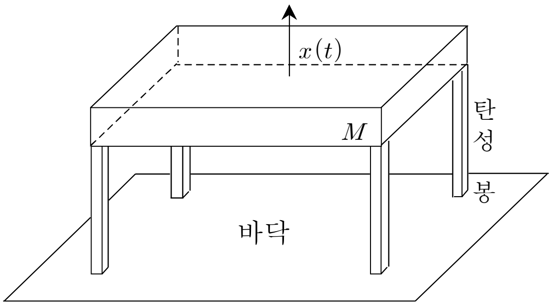
(c,d) Consider the step response described by

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\} \qquad (t \ge t_0)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Derive the analytical expression of the peak time t_p from t_0 by noting that it occurs at the first peak of the curve, and then derive the overshoot from the steady-state response.

6.[9점] 질량 M인 강체 테이블이 4개의 탄성 봉으로 바닥에 탄성지지 되어 있다. 탄성 봉의 질량은 무시된다. (각 문항의 최종 답은 주어진 기호만을 사용하여 표현해야 함)



(a) 탄성 봉의 아래 끝이 바닥에 고정되어 있을 때, 이 구조물의 수직방향 진동에 관한 고유진동수를 표현하여라. 각 탄성 봉의 단면적은 A, 길이는 L, 탄성계수는 E이다.

(b) 구조물의 고유진동수는 ω_n이다. 바닥이 수직 위 방향으로 변위 $Y\ \sin\omega t$ 인 조화운동을 한다. 테이블의 수직방향 변위를 $x(t)$라고 하고, 자유물체도(F.B.D.)를 그려서 운동방정식을 유도한 후, 응답 변위의 진폭을 표현하여라.

(c) 위 (b)의 진동을 억제하기 위해 강성 k_a인 스프링과 질량 m_a를 테이블 중앙에 수직 위 방향으로 추가하였다. 4개 탄성 봉의 등가강성을 k_{eq}라고 표현하고, 질량 m_a의 수직 위 방향 변위를 $x_a(t)$라고 표현한다. 자유물체도를 그리고 운동방정식들을 유도하여라.

7.[9점] 질량이 m이고 비감쇠 고유진동수가 ω_n이며 감쇠비가 ζ이고 감쇠 고유진동수가 ω_d인 1자유도계에 다음과 같은 가진력 $F(t)$가 가해진다.

$0 \le t \le t_0$ 일 때, $F(t) = F_0$ (일정)

$t \ge t_0$ 일 때, $F(t) = F_0\, e^{-a(t-t_0)}$ (a는 양의 상수)

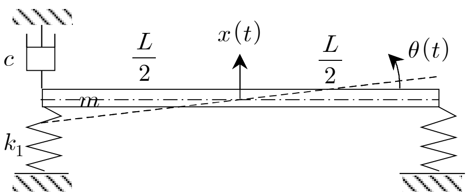
관찰 시점 t가 다음과 같을 때 응답 $x(t)$를 구하기 위한 합성곱(convolution) 적분식을 제시하여라. (적분 계산 불필요)

(a) $0 \le t \le t_0$ 일 때

(b) $t \ge t_0$ 일 때, $(t-\tau)$ 형태의 단위 충격하중 응답 사용

(c) $t \ge t_0$ 일 때, τ 형태의 단위 충격하중 응답 사용

8.[9점] 자동차의 피칭(pitching) 진동을 해석하기 위하여 옆에서 본 모델을 그림과 같이 2자유도계로 단순화 하였다. 질량은 m이고 길이는 L인 균일한 막대의 양 끝이 스프링 위에 놓여 있고, 앞쪽에는 감쇠기(damper)도 있다. 막대가 수평으로 놓인 정적 평형 위치를 기준으로, 질량중심의 수직 변위를 $x(t)$라 하고, 막대의 회전각을 $\theta(t)$라 한다. 질량중심에 관한 막대의 질량관성모멘트는 $(1/12)mL^2$이다. 앞과 뒤의 스프링 상수는 각각 k_1과 k_2이고, 감쇠기의 감쇠계수는 c이다. 중력은 결과에 영향을 주지 않으므로 고려하지 않는다.



(a) 막대에 작용하는 외력을 표현하여 자유물체도(free-body diagram)를 완성하여라.

(b,c) 뉴튼 2법칙 및 오일러 2법칙에 따라 운동방정식을 유도한 후, 행렬(matrix) 형태로 표현하여라.

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$, $\quad L\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $\quad L\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$

$L\{\sin\ at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $\quad L\{\cos\ at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

9.[6점] 일반 강제응답에 관한 다음 물음에 답하여라.

(a) 다음 운동방정식으로 표현되는 1자유도 감쇠계의 강제응답 $x_p(t)$를 Laplace변환법으로 구하여라. 시간영역 $t \ge 0$에 대하여.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \hat{f}_0\,\delta(t-t_1) \qquad (t_1 > 0)$$

(b) 어떤 주기적 가진력 $F(t)$가 다음 식과 같이 Fourier 급수로 표현되었다.

$$F(t) = 4\,\sin t + \frac{4}{9}\sin 3t + \frac{4}{25}\sin 5t + \cdots \ \ \mathrm{N}$$

비감쇠 고유진동수 ω_n이 4 rad/s이고, 감쇠비 ζ가 0.10이며, 질량이 2 kg인 1자유도 감쇠계에 이 가진력이 가해질 때, 정상상태 응답 $x_p(t)$를 다음과 같이 구하고자 한다.

$$x_p(t) = X_1\sin(t-\theta_1) + X_2\sin(3t-\theta_2) + X_3\sin(5t-\theta_3) + \cdots$$

X_3와 θ_3를 구하여라.

10.[9점] 진동실험에 관한 다음 물음에 답하여라.

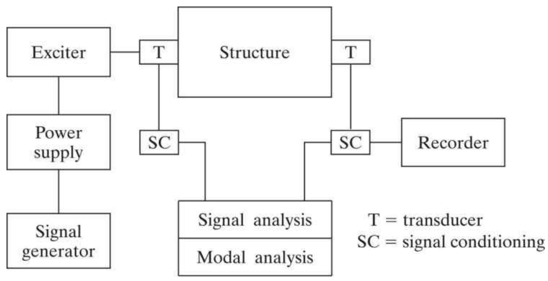
(a) 압전형 진동 가속도 센서의 전기적 출력 $z(t)$는 센서가 부착된 면의 진동 가속도 $\ddot{y}(t)$에 비례한다. $z \propto \dfrac{1}{\omega_n^2}\ddot{y}$. 고유진동수 ω_n이 큰 소형 센서의 장점 2개와 단점 1개를 제시하라.

장점 : ①

②

단점 :

(b) 진동실험 목적 중 '고유진동수 및 모드형상 계측' 목적에 사용되는 측정장비를 다음 그림과 같이 구성한다. 이 중에서 진동 '응답(response)'만을 측정하여 구조물 시스템의 진단(diagnostics)에도 사용되는 장비에 O표 하고 이들을 연결하는 선에 신호의 흐름 방향을 나타내는 화살표를 표시하여라.



(c) 진동 측정장비 중 신호발생기(signal generator)의 기능을 스마트폰 앱(가령, waveform generator)으로 대신할 수 있다. 이러한 앱이 설치된 스마트폰으로 '맥놀이(beat)' 현상을 시연하는 방안을 제시하여라.

기 계 진 동 학　　　　2020년 학기말시험 (가/나/다반) 해 답

1. (a) ① (진동 억제 대상 5개)
② (진동 활용 사례 5개)

(b) ① repetitive (반복적인)
② shape (모양), performance (성능)

(c) SPL_A = 99.1 dB, SPL_B = 81.0 dB

$$20\ \log\frac{p_A}{p_0} = SPL_A\ ,\quad 20\ \log\frac{p_B}{p_0} = SPL_B$$

$$\Rightarrow\quad 20\ \log\frac{p_A}{p_0} - 20\ \log\frac{p_B}{p_0} = SPL_A - SPL_B \quad\Rightarrow\quad 20\ \log\frac{p_A}{p_B} = SPL_A - SPL_B$$

$$\Rightarrow\quad \frac{p_A}{p_B} = 10^{\frac{SPL_A - SPL_B}{20}} = 10^{\frac{99.1-81.0}{20}} = 10^{0.905} = 8.03 \approx 8.0$$

2. m = 5.2 kg, $x(t_1)$ = 2.80 mm, $x(t_3)$ = 0.76 mm, v_0 = 45 mm/s

(a) $$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t_1)}{x(t_{n+1})} = \frac{1}{2}\ln\frac{x(t_1)}{x(t_3)} = \frac{1}{2}\ln\frac{2.80}{0.76} = 0.652$$

$$\Rightarrow\quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0.652}{\sqrt{4\pi^2+0.652^2}} = 0.1032 \quad (\text{또는}\ \ \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.652}{2\pi} = 0.1038\ )$$

(b) t_1 = 0.09 s, t_3 = 0.81 s

$$t_{n+1} - t_1 = n\,T \quad\Rightarrow\quad T = \frac{1}{n}\ (t_{n+1} - t_1) = \frac{1}{2}\ (t_3 - t_1) = \frac{1}{2}\ (0.81 - 0.09)\ \text{s} = 0.36\ \text{s}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi\ \text{rad}}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{0.36\ \text{s}} = 17.453\ \text{rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{17.453\ \text{rad/s}}{\sqrt{1-0.1032^2}} = 17.55\ \text{rad/s}$$

(c) $\dot{x}(0)$ = 45 mm/s = 0.045 m/s

$\hat{F} = m\,\dot{x}(0)$ = (5.2 kg) (0.045 m/s) = 0.234 kg m/s = 0.234 N㎳

3. (a) ω_n = 2,050 rad/s, ζ = 0.275, x_0 = −6.80 mm, v_0 = 0.

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.275^2}\ (2{,}050\ \text{rad/s}) = 1{,}971\ \text{rad/s}$$

$$\zeta\,\omega_n = (0.275)(2{,}050\ \text{rad/s}) = 564\ \text{rad/s}$$

$$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ [-\zeta\,\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)]$$

$$x(0) = A\ \sin\phi = x_0 = -6.80\ \text{mm}\ < 0\ \ \cdots\ ①$$

$$\dot{x}(0) = A\ (-\zeta\,\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi) = v_0 = 0$$

$$\Rightarrow\quad A\ \cos\phi = \frac{\zeta\omega_n x_0}{\omega_d} = \frac{(564\ \text{rad/s})(-6.80\ \text{mm})}{1{,}971\ \text{rad/s}} = -1.946\ \text{mm}\ < 0\ \ \cdots\ ②$$

$①^2 + ②^2 \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{(-6.80\ \text{mm})^2 + (-1.946\ \text{mm})^2} = 7.07\ \text{mm}$

$① \div ② \quad\Rightarrow\quad \phi = \tan^{-1}\frac{-6.80}{-1.946} = \tan^{-1}(3.494) = 1.292\ \text{rad}\ (= 74.0°)$

$\sin\phi<0$ 이고 $\cos\phi<0$ 이므로, ϕ는 3사분면의 각도이어야 함.

$\Rightarrow\quad \phi$ = 1.292 rad + π rad = 4.43 rad　　또는　　ϕ = 1.292 rad − π rad = −1.850 rad

(b) m = 0.750 kg, k = 2,850 N/m, c = 27.0 kg/s, F_0 = 35.0 N

$$f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{35.0\ \text{N}}{0.750\ \text{kg}} = 46.67\ \text{m/s}^2, \quad \omega = 26\pi\ \text{rad/s} = 81.68\ \text{rad/s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}850\ \text{N/m}}{0.750\ \text{kg}}} = 61.64\ \text{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\,m\,\omega_n} = \frac{27.0\ \text{kg/s}}{2\,(0.750\ \text{kg})\,(61.64\ \text{rad/s})} = 0.292, \quad r = \frac{81.68\ \text{rad/s}}{61.64\ \text{rad/s}} = 1.326$$

<방법1>

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

$$= \frac{46.64\ \text{m/s}^2}{\sqrt{[(61.64\ \text{rad/s})^2 - (81.68\ \text{rad/s})^2]^2 + [2\,(0.292)\,(61.64\ \text{rad/s})\,(81.68\ \text{rad/s})]^2}}$$

$$= 0.01135\ \text{m} = 11.35\ \text{mm}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \tan^{-1}\frac{2\,(0.292)\,(61.64\ \text{rad/s})\,(81.68\ \text{rad/s})}{(61.64\ \text{rad/s})^2 - (81.68\ \text{rad/s})^2} = \tan^{-1}(-1.021) = -0.796\ \text{rad}$$

$$0 < \theta < \pi \quad \Rightarrow \quad \theta = -0.796 + \pi\ \text{rad} = 2.35\ \text{rad}$$

<방법2>

$$X = \frac{f_0/\omega_n^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$= \frac{(46.67\ \text{m/s}^2)/(61.64\ \text{rad/s})^2}{\sqrt{(1-1.326^2)^2 + [2\,(0.292)\,(1.326)]^2}} = 0.01133\ \text{m} = 11.33\ \text{mm}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2} = \tan^{-1}\frac{2\,(0.292)\,(1.326)}{1-(1.326)^2} = \tan^{-1}(-1.021) = -0.796\ \text{rad}$$

$$0 < \theta < \pi \quad \Rightarrow \quad \theta = -0.796 + \pi\ \text{rad} = 2.35\ \text{rad}$$

4. (a) $T = \frac{1}{2}J_2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}mR^2\,\dot{\theta}^2 \quad \leftarrow \quad J_2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

(또는 $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,(R\dot{\theta})^2 = \frac{3}{4}mR^2\,\dot{\theta}^2$)

$$U = \frac{1}{2}k\,[\,(R+a)\sin\theta]^2 - m\,g\,R\,(1-\cos\theta)$$

(b) $\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{3}{4}mR^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\,[\,(R+a)\sin\theta]^2 - m\,g\,R\,(1-\cos\theta)\right\} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}mR^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + k\,(R+a)^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,R\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}mR^2\,\ddot{\theta} + k\,(R+a)^2\sin\theta\cos\theta - m\,g\,R\sin\theta = 0$$

$\theta \approx 0$ 이면, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}mR^2\,\ddot{\theta} + k\,(R+a)^2\,\theta - m\,g\,R\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}mR^2\,\ddot{\theta} + [\,k\,(R+a)^2 - m\,g\,R]\,\theta = 0$$

(c) 안정(stable)하게 조화함수 형태로 진동($\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$)하기 위한

조건 : $k\,(R+a)^2 - m\,g\,R > 0$

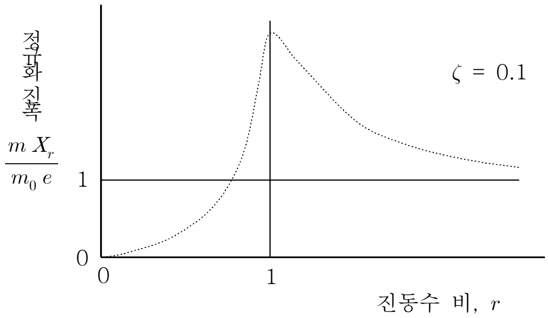
고유진동수 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k\,(R+a)^2 - m\,g\,R}{\frac{3}{2}mR^2}}$ (또는 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2\,k\,(R+a)^2}{3\,m\,R^2} - \dfrac{2\,g}{3\,R}}$)

5. (a) 보존 여부 : 내부 에너지가 보존되지 않고 증가함

이 유 : 외부로부터 지속적으로 가진력이 가해지므로 역학적 에너지가 유입됨

(b) 회전불균형 진폭 (정규화 진폭)을 작게 하는 방안으로,

$$\frac{m\,X_r}{m_0\,e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$



진동수 비를 0으로 하면 좋겠지만 회전수가 있어서 그럴 수 없으므로 대신에

진동수 비 $r(=\frac{\omega_r}{\omega_n})$을 크게 하기 위해 고유진동수 $\omega_n(=\sqrt{\frac{k}{m}})$을 작게 하려고

강성 k가 큰 볼트/너트 고정 대신에 강성 k가 작은 스프링으로 유연지지 함.

(c,d) 계단함수 하중 응답의 peak time t_p = ?

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0)-\phi]\right\} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k}\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\{\zeta\omega_n\cos[\omega_d(t-t_0)-\phi]+\omega_d\sin[\omega_d(t-t_0)-\phi]\}$$

$$\dot{x}(t_p) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \zeta\omega_n\cos[\omega_d(t_p-t_0)-\phi)+\omega_d\sin[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] = 0$$

$$\tan[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] = \frac{-\zeta\omega_n}{\omega_d} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_d(t_p-t_0)-\phi = n\pi + \tan^{-1}\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_d(t_p-t_0) = n\pi + \tan^{-1}\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = n\pi$$

$\Rightarrow$ $n = 1$ 일 때, $t_p - t_0 = \frac{\pi}{\omega_d}$

O.S. = $x(t_p) - x_{ss}(t)$

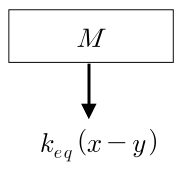
$$= \frac{F_0}{k}\left\{-\frac{e^{-\zeta\omega_n(t_p-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t_p-t_0)-\phi]\right\} = \frac{F_0}{k}\left[-\frac{e^{-\pi\zeta\omega_n/\omega_d}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\pi-\phi)\right]$$

$$= \frac{F_0}{k}\frac{e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\phi = \frac{F_0}{k}e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (\ \cos\phi = \sqrt{1-\zeta^2}\ )$$

6. (a) $k = \frac{EA}{L}$, $k_{eq} = 4k = \frac{4EA}{L}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{M}} = \sqrt{\frac{4EA}{ML}}$

(b) $y(t) = Y\,\sin\omega t$

F.B.D.



$-k_{eq}\,(x - y) = M\ddot{x}$

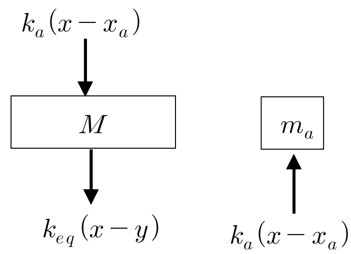
$\Rightarrow$ $M\ddot{x} + k_{eq}x = k_{eq}y$ $\Rightarrow$ $M\ddot{x} + k_{eq}x = k_{eq}Y\,\sin\omega t$

$\Rightarrow$ $\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 Y\,\sin\omega t$

$$x(t) = X\,\sin(\omega t-\theta), \quad X = \frac{\omega_n^2 Y}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2}} = \frac{\omega_n^2 Y}{|\omega_n^2-\omega^2|}$$

(c) $M\ddot{x} = -k_{eq}\,(x - y) - k_a\,(x - x_a)$

F.B.D.



$\Rightarrow$ $M\ddot{x} + (k_{eq}+k_a)\,x - k_a x_a = k_{eq}y$

$\Rightarrow$ $M\ddot{x} + (k_{eq}+k_a)\,x - k_a x_a = k_{eq}Y\,\sin\omega t$

$m_a\ddot{x}_a = k_a\,(x - x_a)$ $\Rightarrow$ $m_a\ddot{x}_a - k_a x + k_a x_a = 0$

7. (a) $x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

또는 $0 < t-\tau < t \;\Rightarrow\; t > \tau > 0,\quad x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

(b) $x_1(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^{t_0} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau-t_0)}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$

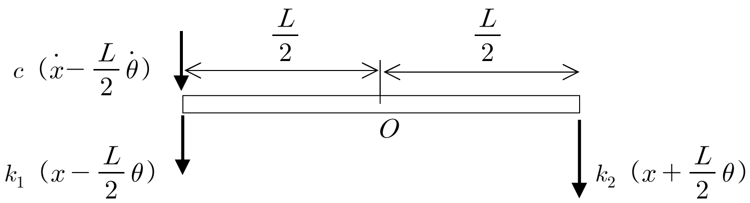
$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^{t_0} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau + \frac{F_0}{m\omega_d}\int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau-t_0)}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$

(c) $0 < t-\tau < t_0 \;\Rightarrow\; t > \tau > t-t_0,\quad x_1(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_d}\displaystyle\int_{t-t_0}^{t} e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

$t_0 < t-\tau < t \;\Rightarrow\; t-t_0 > \tau > 0,\quad x_2(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^{t-t_0} e^{-a(t-t_0-\tau)}e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_{t-t_0}^{t} e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau + \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^{t-t_0} e^{-a(t-t_0-\tau)}e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$$

8. (a) F.B.D.



(b,c) $\Sigma F = m\ddot{x}\ ;\ \ -k_1\ (x-\frac{L}{2}\theta) - k_2\ (x+\frac{L}{2}\theta) - c\ (\dot{x}-\frac{L}{2}\dot{\theta}) = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} + (k_1+k_2)\,x + c\,\dot{x} - (k_1-k_2)\frac{L}{2}\,\theta - c\,\frac{L}{2}\,\dot{\theta} = 0$$

$\Sigma M = J\ddot{\theta}\ ;\ \ k_1\ (x-\frac{L}{2}\theta)\frac{L}{2} - k_2\ (x+\frac{L}{2}\theta)\frac{L}{2} + c\ (\dot{x}-\frac{L}{2}\dot{\theta})\frac{L}{2} = J\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{12}mL^2\ \ddot{\theta} - (k_1-k_2)\frac{L}{2}\,x - c\,\frac{L}{2}\,\dot{x} + (k_1+k_2)\frac{L^2}{4}\ \theta + c\,\frac{L^2}{4}\,\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -\frac{cL}{2} \\ -\frac{cL}{2} & \frac{cL^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -\frac{(k_1-k_2)L}{2} \\ -\frac{(k_1-k_2)L}{2} & \frac{(k_1+k_2)L^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

9. (a) $0 \le t \le t_1$ 일 때, $\hat{f}_0\,\delta(t-t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = 0$

$t \ge t_1$ 일 때, $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \hat{f}_0\,\delta(t-t_1) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \hat{f}_0\, e^{-t_1 s}$

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{F(s)}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$F(s) = \hat{f}_0$ 이면

$$X(s) = \hat{f}_0 \frac{1}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{\hat{f}_0}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{\hat{f}_0}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = \frac{\hat{f}_0}{\omega_d}\, L^{-1}\left[\frac{\omega_d}{s^2 + \omega_d^2}\right] L^{-1}\left[\frac{1}{s+\zeta\omega_n}\right]$$

$$= \frac{\hat{f}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t$$

$F(s) = \hat{f}_0\, e^{-t_1 s}$ 이므로 $\qquad x_p(t) = \dfrac{\hat{f}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)} \sin\omega_d(t-t_1)$

다른 표현 : $x_p(t) = \dfrac{\hat{f}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)} \sin\omega_d(t-t_1)\ \Phi(t-t_1)$ $\qquad$ (Φ는 Heaviside step function)

(b) $m = 2$ kg, $\zeta = 0.10$, $\omega_n = 4$ rad/s

$f(t) = \dfrac{F(t)}{m} = 2\sin t + \dfrac{2}{9}\sin 3t + \dfrac{2}{25}\sin 5t + \cdots$ N/kg

$x_p(t) = X_1 \sin(t-\theta_1) + X_2 \sin(3t-\theta_2) + X_3 \sin(5t-\theta_3) + \cdots$

$$X_3 = \frac{f_3}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{\frac{2}{25}\ \mathrm{m/s^2}}{\sqrt{[(4\ \mathrm{rad/s})^2 - (5\ \mathrm{rad/s})^2]^2 + [2\,(0.10)\,(4\ \mathrm{rad/s})\,(5\ \mathrm{rad/s})]^2}}$$

$= 0.00812$ m $= 8.12$ mm

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2} = \tan^{-1}\frac{2(0.1)(4)(5)}{4^2-5^2} = \tan^{-1}\frac{2(0.1)(4)(5)}{4^2-5^2} = \tan^{-1}(-0.4444)$$

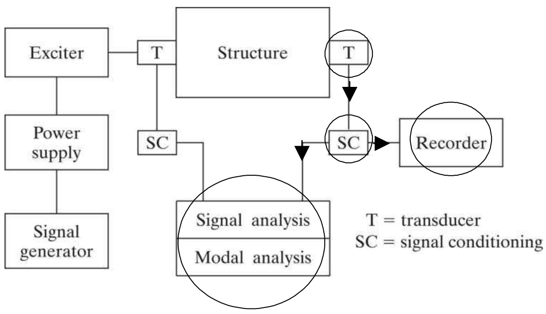
$= -0.418$ rad $+\ \pi$ rad $= 2.72$ rad

10. (a) 장점 : ① 사용 가능한 진동수 ω의 상한 범위가 큼

② 센서의 질량이 작아 부착된 구조물에 부가질량 효과가 작음

단점 : 출력이 작으므로 감도(sensitivity)가 작음

(b)



(c) 맥놀이(beat)현상은 주파수가 약간 다른 두 음파의 간섭 현상이므로,
앱 설치된 2개의 스마트폰 사용하여 비슷한 주파수의 조화함수로 소리를 발생시키고,
주파수 차이를 변경해가며 소리의 맥놀이 주기와 최대 크기의 변화를 시연.