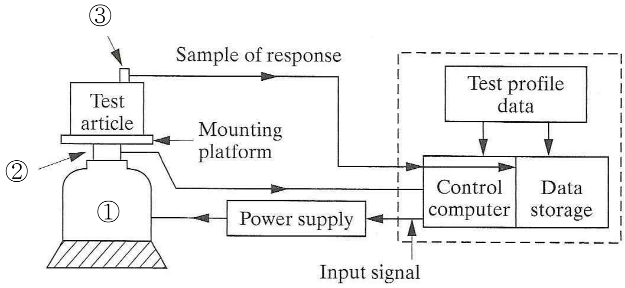
기 계 진 동 학　　2019년 학기말시험 (가/나/다반) [28점]　　2019. 6. 7.

1.[3점] 진동실험 중 ‘내구성 시험’과 ‘시스템 진단’에 관한 다음 질문에 영어 또는 한국어로 답하여라.

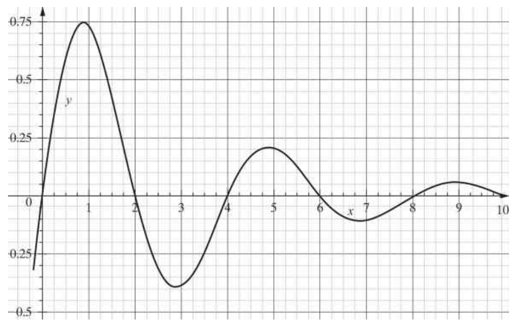
(a) 진동 내구성(endurance) 시험 장비를 다음과 같이 구성하는 경우에 ①, ②, ③에 적합한 명칭은 각각 무엇인가?



(b) 다음 문장의 빈 칸에 적합한 단어는 각각 무엇인가?

Another use of vibration testing is diagnostics or machine health (①). If a system’s frequencies are measured and monitored over a period of time and a change is observed, then some change in the system’s (②) or (③) must be the cause. A change in (③) could imply a cracked or malfunctioning part and a change in (②) might reflect excessive wear.

2.[4점] 스프링-질량체-감쇠기로 구성된 1자유도계에서 질량체에 가해진 충격하중에 의한 진동응답 측정 결과가 $x-y$ 그래프로 나와 있다. x축의 시간은 초(s) 단위이고, y축의 변위는 cm 단위이다.



(a) 이 시스템의 감쇠비 ζ와 비감쇠고유진동수 ω_n을 구하여라. (시간 측정은 곡선이 x축과 만나는 시점에서 행함)

(b) 곡선의 첫 번째 극대값(peak)은 몇 초(s)에 나타났는지를 충격하중응답 식 $x(t)$로부터 유도하여 구하여라.

3.[2점] 1자유도 감쇠계에서 질량과 강성이 일정할 때, 감쇠비 ζ 값이 증가함에 따라, 계단함수하중 응답(step response) 그래프에서 다음 사항의 변화 경향과 그 근거를 제시하여라.

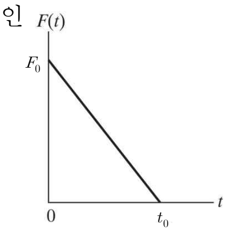
(a) 부족감쇠계($0<\zeta<1$)의 경우, 정점시간(peak time)

(b) 과도감쇠계($\zeta>1$)의 경우, 정착시간(settling time)

4.[4점] 질량이 m이고 고유진동수가 ω_n인 1자유도 비감쇠(undamped)계에 다음과 같이 가진력 $F(t)$가 가해진다.

$0 \le t < t_0$ 에서 $F(t) = F_0\left(1-\dfrac{t}{t_0}\right)$

$t \ge t_0$ 에서 $F(t) = 0$



두 구간에서 응답 $x(t)$를 구하기 위한 합성곱 적분(convolution integral)식을 두 가지씩 제시하여라.

(적분 계산 불필요)

(a) $0 \le t < t_0$ 구간에서

(b) $t \ge t_0$ 구간에서

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$L\{\delta(t)\} = 1,\qquad L\{1\} = \dfrac{1}{s},\qquad L\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$

$L\{\sin\ at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2},\qquad L\{\cos\ at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

5.[5점] 다음 운동방정식으로 표현되는 1 자유도 비감쇠계의 강제응답 $x_p(t)$를 Laplace 변환법으로 구하여라.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_1 \cos\omega t + \hat{f}_2\,\delta\!\left(t-\frac{\pi}{2\omega}\right) \qquad (\omega \ne \omega_n,\ t>0)$$

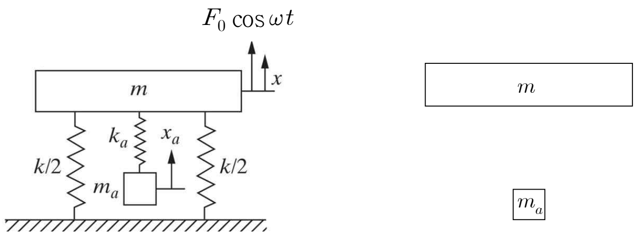
(a) $0 < t < \dfrac{\pi}{2\omega}$ 일 때

(b) $t > \dfrac{\pi}{2\omega}$ 일 때

6.[4점] 1자유도 비감쇠계에서 고유진동수가 20 rad/s이고, 단위질량 당 가진력 $f(t)$가 다음과 같을 때, 가진력에 의한 응답 $x_p(t)$를 구하여라. (단위 주의)

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{n\pi}\right)\sin 2nt \quad (\mathrm{N/kg})$$

7.[6점] 질량이 m인 테이블 판이 등가강성이 k인 스프링 받침 위에 놓여 있고, 회전불균형에 의해 조화가진력 $F_0 \cos\omega t$ 에 의해 진동한다. 테이블 판의 진동을 저감시키기 위해 질량 m_a와 강성 k_a인 스프링으로 이루어진 1자유도계를 왼쪽 그림과 같이 테이블에 매단다. 중력은 결과에 영향을 주지 않으므로 고려하지 않는다.



(a) 두 질량체의 자유물체도(F.B.D.)를 오른쪽 그림에 각각 그리고, 뉴튼법칙에 근거하여 운동방정식을 유도해 구한 후 행렬(matrix)형태로 표현하여라. (주어진 기호로 표현함)

(b) 부가질량 m_a의 진폭 X_a가 다음과 같다.

$$X_a = \frac{k_a F_0}{(k+k_a-m\omega^2)(k_a-m_a\omega^2)-k_a^2}$$

테이블의 진폭 X가 0일 때, 부가질량의 강제진동 응답 $x_a(t)$를 표현하여라.

(c) m = 400 kg, m_a = 10 kg, k = 2,000 N/m (= 2 kN/m), k_a = 900 N/m일 때, 위의 2자유도계의 고유진동수 ω_1과 ω_2를 계산하여 구하여라.

기 계 진 동 학　　　　2019년 학기말시험 (가/나/다반)　　해 답

1. (a) ① 가진기(shaker 또는 exciter), ② 힘 변환기(load cell 또는 force transducer), ③ 가속도계(accelerometer)
   (b) ① 감시(monitoring), ② 질량(mass), ③ 강성(stiffness)

2. (a) 그래프로부터 $T = 4$ s, $x_1 = 0.75$ cm, $x_2 = 0.21$ cm

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{0.75}{0.21} = \ln 3.571 = 1.273$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{(1.273)}{\sqrt{4\pi^2+(1.273)^2}} = 0.19856 \qquad \Rightarrow \qquad \zeta = 0.1986$$

$$\omega_d = \frac{2\pi\ \text{rad}}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{4\ \text{s}} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad/s} = 1.571\ \text{rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1.571\ \text{rad/s}}{\sqrt{1-0.19856^2}} = 1.6027\ \text{rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_n = 1.603\ \text{rad/s}$$

(또는 $\zeta = \dfrac{\delta}{2\pi} = \dfrac{1.273}{2\pi} = 0.203$, $\quad \omega_n = \dfrac{1.571\ \text{rad/s}}{\sqrt{1-0.203^2}} = 1.604\ \text{rad/s}$)

(b) $x(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$, $\quad \dot{x}(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}(-\zeta\omega_n\sin\omega_d t + \omega_d\cos\omega_d t)$

$$\dot{x}(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\zeta\omega_n\sin\omega_d t_1 + \omega_d\cos\omega_d t_1 = 0$$

$$\tan\omega_d t_1 = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \frac{\sqrt{1-0.1986^2}}{0.1986} = 4.935$$

$$\omega_d t_1 = \tan^{-1}(4.935) = 1.371\ \text{rad}$$

$$t_1 = \frac{\omega_d t_1}{\omega_d} = \frac{1.371\ \text{rad}}{1.571\ \text{rad/s}} = 0.8726\ \text{s} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 0.873\ \text{s}$$

(또는 $\dfrac{\sqrt{1-0.203^2}}{0.203} = 4.824$, $\tan^{-1}(4.824) = 1.366$ rad, $\dfrac{1.366\ \text{rad}}{1.571\ \text{rad/s}} = 0.870$ s)

3. (a) 부족감쇠계($0<\zeta<1$)의 경우, 감쇠비 ζ가 증가함에 따라
   정점시간(peak time) t_p가 길어진다. 근거: $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$ $\left(= \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$ 에서 분모 감소
   (b) 과도감쇠계($\zeta>1$)의 경우, 감쇠비 ζ가 증가함에 따라
   정착시간(settling time) t_s가 길어진다. 근거 : (MATLAB으로 관찰한 그래프 제시)

4. (a) $0 \le t < t_0$

① $x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t\left(1-\frac{\tau}{t_0}\right)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$

② $0<t-\tau<t \quad \Rightarrow \quad 0<\tau<t$, $\qquad x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t\left(1-\frac{t-\tau}{t_0}\right)\sin\omega_n\tau\,d\tau$

(b) $t \ge t_0$

① $x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^{t_0}\left(1-\frac{\tau}{t_0}\right)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$

② $0<t-\tau<t_0 \quad \Rightarrow \quad t-t_0<\tau<t$, $\qquad x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_n}\displaystyle\int_{t-t_0}^{t}\left(1-\frac{t-\tau}{t_0}\right)\sin\omega_n\tau\,d\tau$

5. (a) $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_1 \cos\omega t \qquad (\omega \neq \omega_n)$

L 변환 $\Rightarrow \quad s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_1 \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$$X(s) = f_1 \frac{s}{(s^2+\omega_n^2)(s^2+\omega^2)} = f_1\left[\frac{As+B}{s^2+\omega_n^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$(As+B)(s^2+\omega^2) + (Cs+D)(s^2+\omega_n^2) = s$$

$$A + C = 0, \quad B + D = 0, \quad \omega^2 A + \omega_n^2 C = 1, \quad \omega^2 B + \omega_n^2 D = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = -A, \quad (\omega^2 - \omega_n^2)\, A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}, \quad C = -\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}$$

$$D = -B, \quad (\omega^2 - \omega_n^2)\, B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0, \quad D = 0$$

$$X(s) = \frac{f_1}{\omega^2-\omega_n^2}\left[\frac{s}{s^2+\omega_n^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$X_p(s) = \frac{f_1}{\omega^2-\omega_n^2}\left[-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{f_1}{\omega_n^2-\omega^2}\,\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$x_p(t) = L^{-1}[X_p(s)] = \frac{f_1}{\omega_n^2-\omega^2}\, L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{f_1}{\omega_n^2-\omega^2}\cos\omega t$$

(b) $\ddot{x}_2(t) + \omega_n^2\, x_2(t) = \hat{f}_2\, \delta(t - \dfrac{\pi}{2\omega})$

L 변환 $\Rightarrow \quad s^2 X_2(s) + \omega_n^2 X_2(s) = \hat{f}_2\, e^{-\frac{\pi}{2\omega}s}$

$$X_2(s) = \hat{f}_2 \frac{1}{(s^2+\omega_n^2)}\, e^{-\frac{\pi}{2\omega}s} = \frac{\hat{f}_2}{\omega_n}\frac{\omega_n}{(s^2+\omega_n^2)}\, e^{-\frac{\pi}{2\omega}s}$$

$$x_2(t) = L^{-1}[X_2(s)] = \frac{\hat{f}_2}{\omega_n}\sin\omega_n(t - \frac{\pi}{2\omega})$$

$$x_p(t) = x_p(t) + x_2(t) = \frac{f_1}{\omega_n^2-\omega^2}\cos\omega t + \frac{\hat{f}_2}{\omega_n}\sin\omega_n(t - \frac{\pi}{2\omega})$$

6. $\omega_n = 20$ rad/s

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{n\pi}\right)\sin 2nt \quad \text{(N/kg)}$$

$$x_p(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(2nt - \theta_n)$$

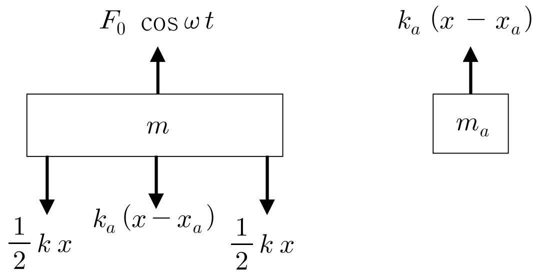
$$x_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{m f_0}{k} = \frac{f_0}{\omega_n^2} = \frac{1.5\ \text{N/kg}}{(20\ \text{rad/s})^2} = 0.00375\ \text{m}$$

$$X_n = \frac{b_n}{\omega_n^2 - (n\omega_T)^2} = \frac{\frac{-3}{n\pi}\ \text{N/kg}}{(20\ \text{rad/s})^2 - (2n\ \text{rad/s})^2} = -\frac{3}{n\pi(400 - 4n^2)}\ \text{m}$$

비감쇠 $\Rightarrow \quad \theta_n = 0$

$$x_p(t) = 0.00375 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n\pi(100-n^2)}\sin 2nt \quad \text{(m)}$$

7. (a)



$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}kx - \frac{1}{2}kx - k_a(x - x_a) + F_0 \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + (k + k_a)x - k_a x_a = F_0 \cos\omega t$$

$$m_a \ddot{x}_a = k_a(x - x_a) \qquad \Rightarrow \quad m_a \ddot{x}_a - k_a x + k_a x_a = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(b) $\sqrt{\frac{k_a}{m_a}} = \omega$, 즉 $k_a - m_a \omega^2 = 0$ 일 때

$$X_a = \frac{k_a F_0}{(k + k_a - m\omega^2)(0) - k_a^2} = -\frac{F_0}{k_a}$$

$$x_a(t) = X_a \cos\omega t = -\frac{F_0}{k_a} \cos\omega t$$

(c) m = 400 kg, m_a = 10 kg, k = 2,000 N/m, k_a = 900 N/m

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ u_a \end{Bmatrix} e^{\pm j\omega_n t}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega_n^2 m + (k + k_a) & -k_a \\ -k_a & -\omega_n^2 m_a + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\omega_n^2 m + (k + k_a) & -k_a \\ -k_a & -\omega_n^2 m_a + k_a \end{bmatrix}$$

$$= (-\omega_n^2 m + k + k_a)(-\omega_n^2 m_a + k_a) - (-k_a)(-k_a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m m_a \omega_n^4 - (m k_a + m_a k + m_a k_a)\omega_n^2 + k k_a = 0$$

$$(400)(10)\omega_n^4 - [(400)(900) + (10)(2{,}000) + (10)(900)]\omega_n^2 + (2{,}000)(900) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4 \times 10^3 \omega_n^4 - 389 \times 10^3 \omega_n + 1{,}800 \times 10^3 = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2(4)}[389 \pm \sqrt{(389)^2 - 4(4)(1{,}800)}] = 4.87, \quad 92.38 \text{ (rad/s)}^2$$

$$\omega_1 = 2.21 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 9.61 \text{ rad/s}$$