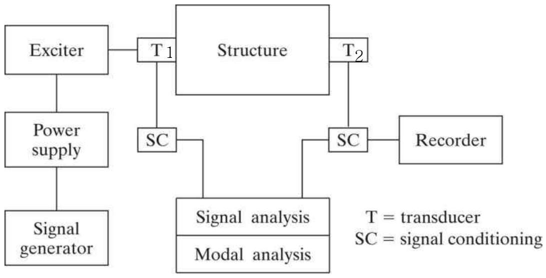
기 계 진 동 학　　2018년 학기말시험 (가/나/다반) [28점]　　2018. 6. 14.

1.[4점] 진동실험 목적 중 '고유진동수 및 모드형상 계측'에 사용되는 측정장비를 다음 그림과 같이 구성한다.



(a) ① 위 블록선도에 신호의 흐름 방향을 나타내는 화살표 8개를 표시하여라. (0.8점)

② 변환기(transducer) T_1과 T_2의 역할을 각각 서술하여라. (1.2점)

(b) 진동 내구성(endurance) 시험에 관하여 답하여라.

① 진동에 의한 내구성 시험의 <u>목적</u>과 <u>사례</u>를 제시하여라.

② 그림의 실험장비들 중에서 선택하여 진동 내구성 시험 장치를 갖출 때에 가진에 필요한 장비 3개는 무엇인가?

2.[4점] 1자유도 감쇠계에서 질량과 강성이 일정할 때 감쇠비 ζ 값을 1에 가깝게 함에 따라, 계단함수하중 응답(step response) 그래프에서 다음 사항의 <u>변화 경향</u>과 <u>그 근거</u>를 제시하여라.

(a) 부족감쇠계($0<\zeta<1$)의 경우

① 오버슛(overshoot)

② 상승시간(rising time)

③ 정착시간(settling time)

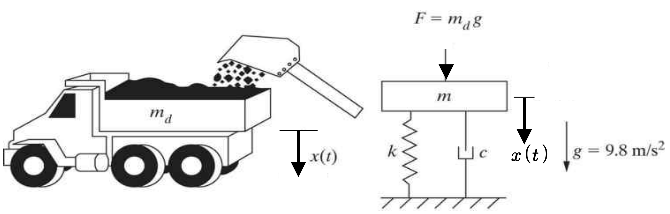
(b) 과도감쇠계($\zeta>1$)의 경우, 정착시간(settling time)

3.[4점] 부족감쇠계의 계단함수하중 응답(step response)은 일반적으로 다음 식으로 표현된다.

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\} \qquad (t \ge t_0)$$

(a) 첫 번째 정점시간(peak time)에서의 오버슛(overshoot)과 두 번째 정점시간에서의 오버슛의 대수감쇠율(logarithmic decrement) δ가 감쇠비 ζ와 어떤 관계인지를 위 식을 사용하여 구하여라.

(b) 전체 질량이 현재 m인 덤프 트럭의 적재함에 질량 m_d의 흙더미를 쏟아 부었다. 트럭은 질량(m)-감쇠기(c)-스프링(k)으로 부족감쇠계로 모델링 된다. 흙더미 하중은 일정 크기 $m_d g$의 힘을 가하는 것으로 간주된다. 흙더미를 쏟아 부은 때부터 트럭의 응답변위를 $x_1(t)$이라고 한다.



Truck being filled with dirt　　Vibration model

흙더미를 쏟아 부은 후 시간이 많이 흘러 정지 상태에 이르렀을 때 또 다른 흙더미(질량 m_d)를 적재함에 쏟아 부었다. 이때의 응답변위를 $x_2(t)$라 한다. $x_2(t)$를 $x_1(t)$와 비교하여 공통점과 차이점을 서술하여라.

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \qquad L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

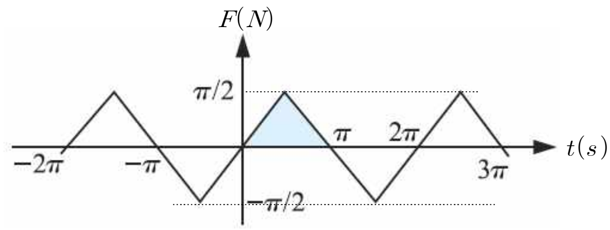
$$L\{\sin\ at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad L\{\cos\ at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

4.[4점] Calculate the <u>forced</u> response $x_p(t)$ of the undamped 1- DOF system given by

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = Bt \qquad (t>0)$$

using the <u>Laplace transform</u> method. (B>0)

5.[4점] 다음 그림과 같은 주기적 가진력이 있다.



가진력 $F(t)$를 Fourier 급수로 나타낸다.

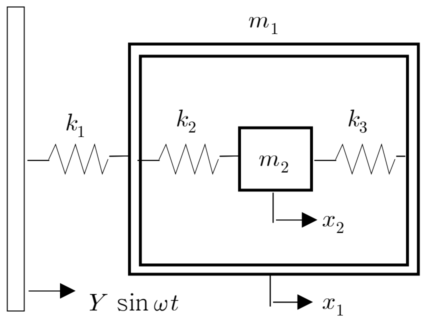
$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

(a) Fourier 계수 a_0가 0임을 계산으로 입증하기 위한 적분식을 표현하여라. (계산은 불필요)

(b) 1자유도 비감쇠계에서 고유진동수가 10 rad/s이고, 단위질량 당 가진력 $f(t)$가 다음과 같을 때, 정상상태(steady-state) 응답 $x_p(t)$를 구하여라. (변위 단위는 mm로 표현)

$$f(t) = \sin t - \frac{1}{3^2}\sin 3t + \cdots \ \text{(N/kg)}$$

6.[8점] 그림과 같이, 집중질량체(질량 m_2)가 스프링 2개(강성 k_2와 k_3)를 통해 강체 상자(질량 m_1)에 연결되어 있다. 강체 상자는 스프링(강성 k_1)을 통해 벽면에 연결되어 있는데, 벽면이 변위 $y(t) = Y\sin\omega t$로 수평방향으로 진동한다. 스프링의 질량은 무시할 만하다, ($Y > 0$)



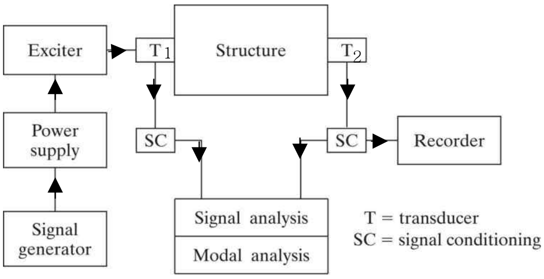
(a,b) 상자와 집중질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 각각 그리고, 뉴튼법칙에 근거하여 운동방정식을 유도해 구한 후 행렬(matrix)형태로 표현하여라.

(c) 상자의 응답 $x_1(t)$의 진폭 X_1을 0으로 하기 위한 조건을 제시하여라.

(d) 강성 k_1이 무한히 커서 진동변위 $x_1(t)$가 $y(t)$와 같을 때, $x_2 - y = z$ 라고 하여 $z(t)$의 진폭 Z와 $y(t)$의 진폭 Y의 비 Z/Y를 표현하여라.

기 계 진 동 학　　　　2018년 학기말시험 (가/나/다반)　　해 답

1. (a) ①



② T_1 : 서술 (내용 : 힘 센서, 가진력에 대응하는 전기 신호 출력)

T_2 : 서술 (내용 : 진동 센서, 진동 가속도 또는 진동 변위에 대응하는 전기 신호 출력)

(b) ① 목적 : 반복 사용에 따른 제품의 성능을 실험적으로 예측

사례 : 자동차 부품, 카 오디오, ⋯

② signal generator, power supply, exciter

2. (a) 부족감쇠계($0<\zeta<1$)의 경우, 감쇠비 ζ가 증가함에 따라

① 오버슛(overshoot)이 작아진다. O.S. = $\dfrac{F_0}{k}\, e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ 에서 음의 지수 증가

② 상승시간(rising time) t_r가 길어진다.

$$t_r = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\left(\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$ 에서 분모 감소, $\left(\pi - \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$ 증가

③ 정착시간(settling time) t_s가 짧아진다. $t_s \approx \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$ 에서 분모 증가

(b) 과도감쇠계($\zeta>1$)의 경우, 감쇠비 ζ가 감소함에 따라

정착시간(settling time) t_s가 짧아진다. (MATLAB으로 관찰한 그래프)

3. (a) $$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k}\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\{\zeta\omega_n\cos[\omega_d(t-t_0)-\phi] + \omega_d\sin[\omega_d(t-t_0)-\phi]\}$$

$$\dot{x}(t_p) = 0 \quad\Rightarrow\quad \zeta\omega_n\cos[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] + \omega_d\sin[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] = 0$$

$$\tan[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] = \frac{-\zeta\omega_n}{\omega_d} \quad\Rightarrow\quad \omega_d(t_p-t_0)-\phi = n\pi + \tan^{-1}\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_d(t_p-t_0) = n\pi + \tan^{-1}\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = n\pi \quad (\text{극대값 } n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots)$$

$$\Rightarrow \quad n = 1 \text{ 일 때,}\quad t_{p1}-t_0 = \frac{\pi}{\omega_d}, \qquad n = 3 \text{ 일 때,}\quad t_{p2}-t_0 = \frac{3\pi}{\omega_d}$$

$$x_1 = x(t_{p1}) - x_{ss}(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n\frac{\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\omega_d\frac{\pi}{\omega_d}-\phi\right)\right] - \frac{F_0}{k} = \cdots = \frac{F_0}{k}e^{-\zeta\omega_n\frac{\pi}{\omega_d}}$$

$$x_2 = x(t_{p2}) - x_{ss}(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n\frac{3\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\omega_d\frac{3\pi}{\omega_d}-\phi\right)\right] - \frac{F_0}{k} = \cdots = \frac{F_0}{k}e^{-\zeta\omega_n\frac{3\pi}{\omega_d}}$$

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{\frac{F_0}{k}e^{-\zeta\omega_n\frac{\pi}{\omega_d}}}{\frac{F_0}{k}e^{-\zeta\omega_n\frac{3\pi}{\omega_d}}} = \ln e^{\zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d}} = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

<다른 방법> 피크(peak)에서 cos[⋯] ≈ -1

$$x_1 = x(t_1) - x_{ss}(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n(t_1-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right\} - \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n(t_1-t_0)}$$

$$x_2 = x(t_2) - x_{ss}(t) = x(t_1+T) - x_{ss}(t) = \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n(t_1-t_0+T)}$$

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{\dfrac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n(t_1-t_0)}}{\dfrac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n(t_1-t_0+T)}} = \ln\ e^{\zeta\omega_n T} = \zeta\omega_n T = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(b) ① 공통점 : 서술 (내용 : 계단함수하중 $m_d g$의 부족감쇠 응답(step response),

정지상태 기준으로 정적 처짐 $\frac{m_d g}{k}$에 수렴하는 정상상태(steady-state) 응답)

② 차이점 : 서술 (내용 : 전체 질량 증가 → 고유진동수 감소 → 응답의 진동 주기 증가,

최초 위치 기준으로 정상상태 응답 $x_{ss}(t)$ 증가 $x_2(t) = \frac{m_d g}{k} + \Delta x_2(t)$)

4. ramp 하중 $f(t) = Bt \quad (t > 0)$

$$F(s) = B\,L[t] = B\frac{1}{s^2}$$

$$X(s) = B\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\frac{1}{s^2} = B\left[\frac{as+b}{s^2} + \frac{cs+d}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$(as+b)(s^2+\omega_n^2) + (cs+d)s^2 = 1$$

$$(a+c)\ s^3 + (b+d)\ s^2 + \omega_n^2\ a\ s + \omega_n^{\ 2}\ b = 1$$

$$a+c = 0\ \cdots①,\quad b+d = 0\ \cdots②,\quad \omega_n^2\ a = 0\ \cdots③,\quad \omega_n^{\ 2}\ b = 1\ \cdots④$$

$$④\Rightarrow\ b = \frac{1}{\omega_n^2},\quad ③\Rightarrow\ a = 0,\quad ②\Rightarrow\ d = -b = -\frac{1}{\omega_n^2},\quad ①\Rightarrow\ c = -a = 0,$$

$$X(s) = \frac{B}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\omega_n^2}\right] = \frac{B}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$x_p(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{B}{\omega_n^2}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$= \frac{B}{\omega_n^2}\ \{\ L^{-1}[\frac{1}{s^2}] - \frac{1}{\omega_n}L^{-1}[\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}]\}$$

$$= \frac{B}{\omega_n^2}\ (\ t - \frac{1}{\omega_n}\ \sin\omega_n t\ )$$

감쇠계의 정상상태(steady-state)응답에 해당하는 응답 $x_{ss}(t)$를 구한다면

$$X_{ss}(s) = \frac{B}{\omega_n^2}\frac{1}{s^2}$$

$$x_{ss}(t) = L^{-1}[X_{ss}(s)] = \frac{B}{\omega_n^2}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{B}{\omega_n^2}\ t$$

5. (a) $T = 2\pi$ s, $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$ rad/s

$F_1(t) = t \quad (0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$, $\quad F_2(t) = \pi - t \quad (\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2})$, $\quad F_3(t) = t - 2\pi \quad (\dfrac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi)$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - t)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (t - 2\pi)\,dt\right]$$

(불필요한 계산 $= \dfrac{1}{\pi}\left\{\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\dfrac{-1}{2}(\pi - t)^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \left[\dfrac{1}{2}(t - 2\pi)^2\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right\}$

$= \dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right] - \dfrac{1}{2}\left[\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right] + \dfrac{1}{2}\left[0 - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right]\right\} = 0$)

(b) $f(t) = \sin t - \dfrac{1}{3^2}\sin 3t + \cdots$, $\quad \omega_n = 10$ rad/s

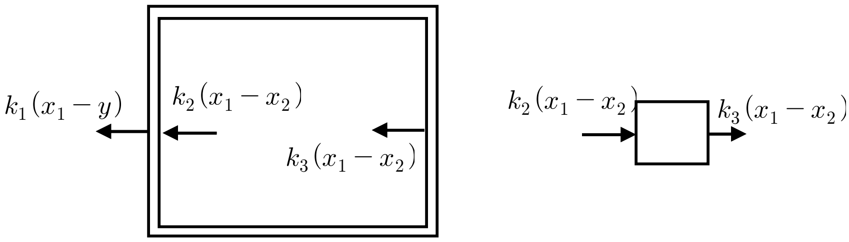
$$x_p(t) = \frac{f_1}{\omega_n^2 - \omega_T^2}\sin t - \frac{f_2}{\omega_n^2 - (3\,\omega_T)^2}\sin 3t + \cdots$$

$$= \frac{1}{10^2 - 1^2}\sin t - \frac{\frac{1}{9}}{10^2 - 3^2}\sin 3t + \cdots \text{ m}$$

$= 0.01010 \sin t - 0.001221 \sin 3t + \cdots$ m

$= 10.10 \sin t - 1.221 \sin 3t + \cdots$ mm

6. (a)



(b) $m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - Y\sin\omega t) - k_2(x_1-x_2) - k_3(x_1-x_2)$

$$\Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2+k_3)\,x_1 - (k_2+k_3)\,x_2 = k_1 Y\sin\omega t$$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1) - k_3(x_2-x_1)$

$$\Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 - (k_2+k_3)\,x_1 + (k_2+k_3)\,x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3 & -(k_2+k_3) \\ -(k_2+k_3) & (k_2+k_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 Y\sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(c) (특수)해의 형태

$x_1(t) = X_1\ \sin\omega t,\qquad x_2(t) = X_2\ \sin\omega t$

$-m_1\omega^2 X_1 + (k_1+k_2+k_3)X_1 - (k_2+k_3)X_2 = k_1 Y\ ,\quad -m_2\omega^2 X_2 - (k_2+k_3)X_1 + (k_2+k_3)X_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1+k_2+k_3) & -(k_2+k_3) \\ -(k_2+k_3) & -m_2\omega^2+(k_2+k_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 Y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1+k_2+k_3) & -(k_2+k_3) \\ -(k_2+k_3) & -m_2\omega^2+(k_2+k_3) \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 Y & -(k_2+k_3) \\ 0 & -m_2\omega^2+(k_2+k_3) \end{vmatrix} = k_1 Y\left[-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\right] = k_1 Y m_2(\omega_{II}^2-\omega^2),\quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{k_2+k_3}{m_2}}$$

진폭 $X_1 = \dfrac{D_1}{D_0} = \dfrac{k_1 Y}{m_1}\dfrac{\omega_{II}^2-\omega^2}{D_0/(m_1m_2)}$

$\sqrt{\dfrac{k_2+k_3}{m_2}} = \omega$ 일 때, $X_1 = 0$

(d) $m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1) - k_3(x_2-x_1)$ 에서, $x_2-x_1 = x_2-y = z,\quad \ddot{x}_2 = \ddot{y} + \ddot{z}$

$m_2\ddot{z} + (k_2+k_3)z = -m_2\ddot{y} = m_2\omega^2\ Y\sin\omega t$

$\ddot{z} + \omega_{II}^2 z = \omega^2\ Y\sin\omega t,\quad z(t) = Z\sin(\omega t-\theta)\qquad$ ($\omega_{II}>\omega$ 일 때 $\theta=0$, $\omega_{II}<\omega$ 일 때 $\theta=\pi$)

$-\omega^2 Z\sin(\omega t-\theta) + \omega_{II}^2 Z\sin(\omega t-\theta) = \omega^2\ Y\sin\omega t$

$\Rightarrow \quad (\omega_{II}^2-\omega^2)Z\sin(\omega t-\theta) = \omega^2\ Y\sin\omega t$

$\Rightarrow \quad \left|\omega_{II}^2-\omega^2\right| Z = \omega^2\ Y$

$$\Rightarrow \quad \frac{Z}{Y} = \frac{\omega^2}{\left|\omega_{II}^2-\omega^2\right|} = \frac{\omega^2}{\left|\dfrac{k_2+k_3}{m_2} - \omega^2\right|}$$