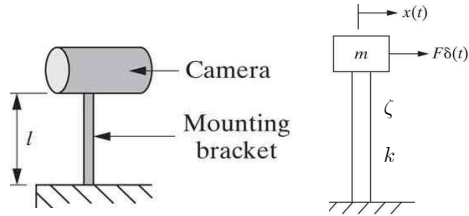


1.[4점] 그림에 보인 바와 같이 보안 카메라가 받침대 위에 설치되어 있다. 카메라는 질량 m 인 집중질량체로 간주되고, 받침대는 질량이 무시되는 외팔보로서 횡강성 k 와 감쇠비 ζ 를 갖는다. ($m = 8.0 \text{ kg}$, $k = 20.0 \text{ kN/m}$, $\zeta = 0.20$)



질량 1.0 kg 인 새가 수평방향으로 날아와서 16 m/s 의 속도로 카메라에 충돌하고 수직으로 떨어진다.

- (a) 새의 충돌로 인한 카메라의 자유응답 $x(t)$ 를 구하여라.
(b) 자유응답 $x(t)$ 의 최대 변위를 구하여라.

2.[6점] 역학적 진동에 관한 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ()안에 하되, 판단 근거를 제시하여라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

- (a) 감쇠(damped)계에 계단함수하중이 가해질 때 응답에서 오버슈트(overshoot)이 작을수록 정착시간(settling time)이 짧고 오버슈트가 없을 때 정착시간이 가장 짧다. ()
(b) 진동 실험을 하는 목적 중 하나는 진동해석에 필요한 계의 파라미터 값을 측정하는 것인데, 감쇠계수(damping coefficient) c 를 구하기 위해서는 질량(mass)과 강성(stiffness)을 먼저 구해야 한다. ()
(c) 진동 측정에 사용하던 압전 가속도계(accelerometer)의 감도(sensitivity)가 4.50 pC/g 였는데, 감도 7.85 pC/g 인 압전 가속도계로 교체하면 사용 가능한 진동수 범위 상한값(upper limit)은 작아진다. ()

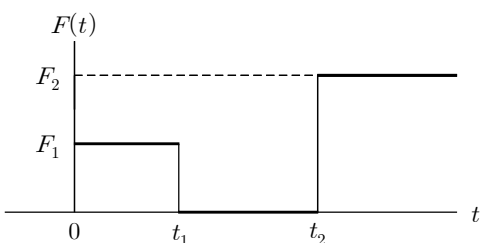
3.[6점] 부작감쇠계의 계단함수하중 응답(step response)은 일반적으로 다음 식으로 표현된다.

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n (t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos[\omega_d (t-t_0) - \phi] \right\} \quad (t \geq t_0)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(a) 상승시간(rising time)은 하중이 가해지기 시작하는 시점 t_0 부터 정상상태(steady-state)응답 F_0/k 에 처음 도달할 때까지의 시간으로 정의된다. 상승시간 t_r 을 유도하여 구하여라.

(b,c) 비감쇠(undamped)계에 다음 그림과 같이 $t=0$ 일 때부터 하중이 가해진다.



- (b) 위에 주어진 식을 응용하여, t_2 시점 이후에 관찰되는 응답 $x(t)$ 를 표현하여라.
(c) 합성곱(convolution)에 의해, t_2 시점 이후에 관찰되는 응답 $x(t)$ 를 계산하는 적분 형태의 식을 제시하여라. (적분 계산 불필요, 주어진 기호로 표현)

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$$L\{\delta(t)\} = 1, \quad L\{\Phi(t)\} = \frac{1}{s}, \quad L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

4.[4점] Calculate the forced response $x_p(t)$ of the undamped 1-DOF system given by

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_1 \sin \omega t + f_2 e^{bt} \Phi(t-a) \quad (t > 0)$$

using the Laplace transform method. ($a > 0$, $b > 0$, $\omega \neq \omega_n$)

(a) when $0 < t < a$

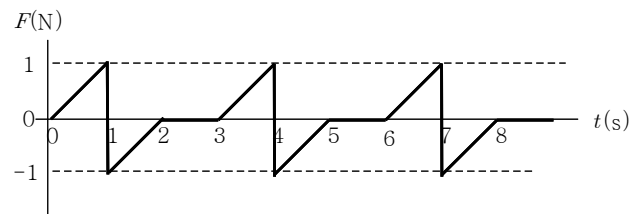
(b) when $t > a$

5.[3점] 다음과 같은 주기적 가진력이 있다. 가진력 $F(t)$ 를

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

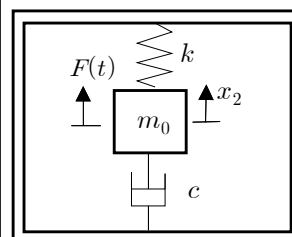
로 나타낼 때, Fourier 계수 a_0 , a_n , b_n 을 제시하여라.

(계수 셋 중 하나는 답만 제시, 둘은 구하는 식만 제시하되 적분 계산 불필요)



6.[4점] 다자유도계에 관한 다음 질문에 답하여라.

(a) 질량이 m_0 인 집중질량체가 강성이 k 인 스프링을 통해 강체 상자에 매달려 있고 감쇠계수 c 인 댐퍼에 의해 상자 바닥에 받쳐있다. 스프링과 댐퍼의 질량은 무시할 만하고, 집중질량체를 포함하는 상자 전체의 질량은 M 이다. 집중질량체에 가해지는 가진력 $F(t)$ 에 의해 상자가 공중에서 상하방향 진동을 하는데, 진동 해석에 중력의 영향을 고려하지 않아도 결과가 타당함을 알고 있다.



상자와 집중질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 각각 그리고, 뉴턴법칙에 근거하여 운동방정식을 유도해 구한 후 행렬(matrix)형태로 표현하여라.

- (b) 다음 설명이 맞으면 O, 틀리면 X를 ()안에 표하여라.
① 2자유도계의 자유진동 해석에서, 특성방정식으로 부터 고유진동수 4개를 구한다. ()
② 모드형상(mode shape)이란 각 고유진동수에서 각 질량체의 상대적 위치에 의해 결정된다. ()
③ 2자유도계 진동의 운동방정식을 행렬(matrix) 형태로 표현하면, 질량행렬(관성행렬)과 강성행렬이 대각(diagonal)행렬 형태로 나타난다. ()
④ 방진테이블에서 회전불균형에 의해 발생하는 조화가진 응답 진폭을 줄이는 방안으로 스프링과 질량체를 부착할 때 테이블의 고유진동수가 구동진동수와 같게 한다. ()

1. $m = 8.0 \text{ kg}$, $k = 20.0 \text{ kN/m}$, $\zeta = 0.20$, $m_b = 1.0 \text{ kg}$, $v_b = 16 \text{ m/s}$

$$(a) \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20,000 \text{ N/m}}{8.0 \text{ kg}}} = 50.0 \text{ rad/s}, \quad \zeta \omega_n = (0.20)(50.0 \text{ rad/s}) = 10.0 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = \sqrt{1 - 0.20^2} (50.0 \text{ rad/s}) = 49.0 \text{ rad/s}$$

$$\hat{F} = m_b v_b = (1.0 \text{ kg})(16 \text{ m/s}) = 16.0 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\frac{\hat{F}}{m \omega_d} = \frac{16.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{(8.0 \text{ kg})(49.0 \text{ rad/s})} = 0.0408 \text{ m}$$

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m \omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t = (0.0408 \text{ m}) e^{-10.0 t} \sin 49.0 t$$

$$(b) x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$\dot{x}(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t)$$

$$\Rightarrow -\zeta \omega_n \sin \omega_d t_p + \omega_d \cos \omega_d t_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \omega_d t_p = \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 0.20^2}}{0.20} = \tan^{-1}(4.899) = 1.369 \text{ rad} (= 78.5^\circ)$$

$$t_p = \frac{\alpha}{\omega_d} = \frac{1.369 \text{ rad}}{49.0 \text{ rad/s}} = 0.0279 \text{ s}$$

$$x(t_p) = (0.0408 \text{ m}) e^{-10.0 \times 0.0279} \sin(49.0 \times 0.0279) = (0.0408 \text{ m}) (0.757) (0.979) = 0.0302 \text{ m}$$

2. (a) X 과도감쇠계

$$(b) \text{ O } \quad c = 2 \zeta \sqrt{m k}$$

$$(c) \text{ O } \quad m \uparrow \Rightarrow \text{ sensitivity } \uparrow, \quad \omega_n \downarrow$$

$$3. (a) x(t_1) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n (t_1 - t_0)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos[\omega_d (t_1 - t_0) - \phi] \right\} = \frac{F_0}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{F_0}{k} \frac{e^{-\zeta \omega_n (t_1 - t_0)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos[\omega_d (t_1 - t_0) - \phi] = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos[\omega_d (t_1 - t_0) - \phi] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_d (t_1 - t_0) - \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t_r = t_1 - t_0 = \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) = \frac{1}{\omega_d} \left(\pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$(b) \zeta = 0 \text{ 일 때 } x(t) = \frac{F_0}{k} \{ 1 - \cos[\omega_n (t - t_0)] \} \quad (t \geq t_0)$$

$$F(t) = F_1 \Phi(t) - F_1 \Phi(t - t_1) + F_2 \Phi(t - t_2) \quad (\Phi(t) : \text{Heaviside step function})$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$= \frac{F_1}{k} \{ 1 - \cos \omega_n t \} - \frac{F_1}{k} \{ 1 - \cos[\omega_n (t - t_1)] \} + \frac{F_2}{k} \{ 1 - \cos[\omega_n (t - t_2)] \}$$

$$= \frac{F_2}{k} - \frac{F_1}{k} \cos \omega_n t + \frac{F_1}{k} \cos[\omega_n (t - t_1)] - \frac{F_2}{k} \cos[\omega_n (t - t_2)]$$

$$(c) x(t) = \frac{1}{m \omega_n} \int_0^{t_1} F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau + 0 + \frac{1}{m \omega_n} \int_{t_2}^t F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{\omega_n F_1}{k} \int_0^{t_1} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau + \frac{\omega_n F_2}{k} \int_{t_2}^t \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

4. (a) $0 < t < a$ 일 때

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_1 \sin \omega t \quad (\omega \neq \omega_n)$$

$$L \text{ 변환} \Rightarrow s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_1 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$X(s) = f_1 \frac{\omega}{(s^2 + \omega_n^2)(s^2 + \omega^2)} = f_1 \left[\frac{As + B}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2} \right]$$

$$(As + B)(s^2 + \omega^2) + (Cs + D)(s^2 + \omega_n^2) = \omega$$

$$A + C = 0, \quad B + D = 0, \quad \omega^2 A + \omega_n^2 C = 0, \quad \omega^2 B + \omega_n^2 D = \omega$$

$$\Rightarrow C = -A, \quad (\omega^2 - \omega_n^2) A = 0 \Rightarrow A = 0, \quad C = 0$$

$$D = -B, \quad (\omega^2 - \omega_n^2) B = \omega \Rightarrow B = \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad D = -\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

$$X(s) = \frac{f_1}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega_n^2} - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right], \quad X_p(s) = \frac{f_1}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[-\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{f_1}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$x_p(t) = L^{-1}[X_p(s)] = \frac{f_1}{\omega_n^2 - \omega^2} L^{-1} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{f_1}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

(b) $t > a$ 일 때

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_n^2 x_2(t) = f_2 e^{bt}$$

$$L \text{ 변환} \Rightarrow s^2 X_2(s) + \omega_n^2 X_2(s) = \frac{f_2}{s - b}$$

$$X_2(s) = f_2 \frac{1}{(s^2 + \omega_n^2)(s - b)} = f_2 \left[\frac{As + B}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{C}{s - b} \right]$$

$$(As + B)(s - b) + C(s^2 + \omega_n^2) = 1$$

$$A + C = 0, \quad B - bA = 0, \quad -bB + \omega_n^2 C = 1$$

$$\Rightarrow C = -A, \quad B = bA, \quad -b^2 A - \omega_n^2 A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{b^2 + \omega_n^2}.$$

$$X_2(s) = \frac{f_2}{b^2 + \omega_n^2} \left[-\frac{s + b}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{s - b} \right] = \frac{f_2}{b^2 + \omega_n^2} \left[\frac{1}{s - b} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} - \frac{b}{\omega_n} \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right]$$

$$x_{p2}(t) = L^{-1}[X_p(s)] = \frac{f_2}{b^2 + \omega_n^2} L^{-1} \left[\frac{1}{s - b} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} - \frac{b}{\omega_n} \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right]$$

$$= \frac{f_2}{b^2 + \omega_n^2} \left[e^{bt} - \cos \omega_n t - \frac{b}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$$

$$x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t) = \frac{f_1}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{f_2}{b^2 + \omega_n^2} \left[e^{bt} - \cos \omega_n t - \frac{b}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$$

5. $a_0 = 0 \quad \because \text{평균값} = 0$

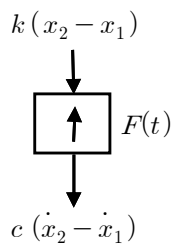
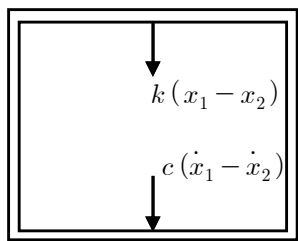
$$T = 3 \text{ s}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad/s} = 2.09 \text{ rad/s}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_T t dt = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/3} F_1(t) \cos n\omega_T t dt + \int_{T/3}^{2T/3} F_2(t) \cos n\omega_T t dt + 0 \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ \int_0^1 t \cos 2.09nt dt + \int_1^2 (t-2) \cos 2.09nt dt \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{3} \left\{ \int_0^1 t \sin 2.09nt dt + \int_1^2 (t-2) \sin 2.09nt dt \right\}$$

6. (a)



$$(M - m_0) \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\Rightarrow (M - m_0) \ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m_0 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F(t)$$

$$\Rightarrow m_0 \ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = F(t)$$

$$\begin{bmatrix} M - m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix}$$

(b) ① X ② O ③ X ④ X