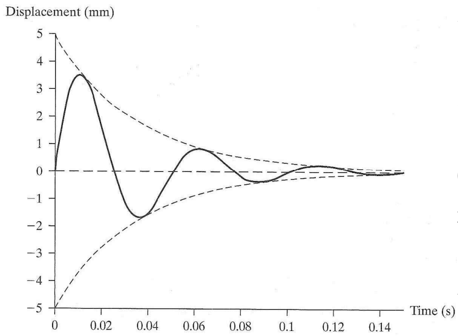
1.[3점] 어떤 1자유도계가 정지해 있다가 충격하중을 받아 응답할 때 진동 변위를 관찰한 결과가 그림과 같다. 첫번째 극대값이 0.01초에서 3.58 mm이고, 세번째 극대값이 0.11초에서 0.26 mm이다.



(a) 감쇠비 ζ를 구하여라.

(b) 비감쇠 고유진동수 ω_n을 구하여라.

(c) 진동응답 변위의 두 번째 극대값은 몇 mm이겠는가?

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( )안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 부족감쇠(underdamped)계에 일정 크기의 계단함수 하중 F_0가 가해질 때, 비감쇠고유진동수 ω_n은 일정하게 유지하면서 감쇠비 ζ를 크게 하면 응답의 오버슛(overshoot)과 정착시간(settling time)이 작아진다. ( )

판단 근거 :

(b) 산업현장에서 dynamic damper라고 부르는 진동흡진기(vibration absorber)는 주로 감쇠기(damper)를 사용하여 진동을 흡수하는 장치이다. ( )

판단 근거 :

(c) 반복 사용에 따른 제품의 성능을 실험적으로 예측하는 <u>내구성 시험</u>에 사용되는 실험 장비는 주로 <u>가진</u> 용도이고, 기계장치나 구조물의 이상 유무를 감시하는 <u>시스템 진단</u>에 사용되는 실험 장비는 주로 <u>응답</u> 계측 용도이다. ( )

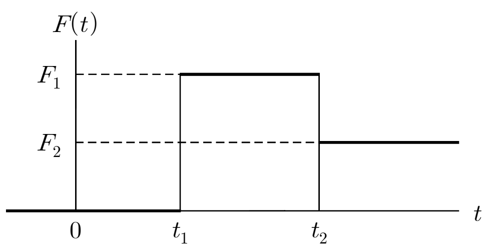
판단 근거 :

3.[3점] 부족감쇠계의 계단함수하중 응답(step response)은 일반적으로 다음 식으로 표현된다.

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\} \qquad (t \ge t_0)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

다음 그림과 같이 t_1부터 t_2시점까지 일정한 힘 F_1이 가해지고 t_2시점부터 일정한 힘 F_2가 가해질 때, <u>주어진 식을 응용</u>하여 t_2시점 이후에 관찰되는 응답 $x(t)$를 표현하여라.



4.[3점] 질량을 무시할 만하고 강성이 50 N/m인 스프링에 2 kg 집중 질량체가 매달린 1자유도 감쇠계(감쇠비 ζ = 0.25)가 있다. 질량체에 다음 식의 주기적 톱니파형 가진력이 t=0일 때부터 가해질 때, t≥0인 시점에서 정상상태 응답 변위 $x_p(t)$를 구하여라.

$$F(t) = 15 - \frac{30}{\pi}\sin\pi t - \cdots \quad \text{(N)} \quad (t \ge 0)$$

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$$L\{\delta(t)\} = 1, \qquad L\{\Phi(t)\} = \frac{1}{s}, \qquad L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$L\{\sin\ at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad L\{\cos\ at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

5.[6점] Calculate the response of the undamped 1-DOF system given by

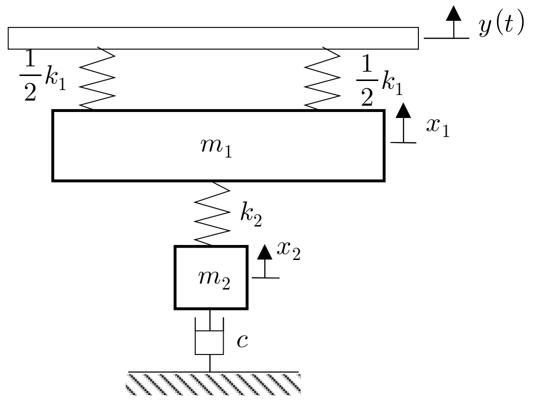
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0\cos\omega t + \hat{f}\,\delta(t-a) \qquad (t > 0)$$

using the <u>Laplace transform</u> method. Assume that initial conditions are all zero. (a>0, $\omega \ne \omega_n$)

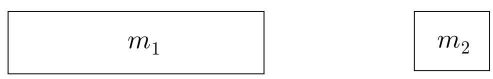
(a) when $0 < t < a$

(b) when $t > a$

6.[6점] 그림과 같이 고정된 바닥 위에 놓인 2자유도계가 천정에 매달려 있다. 천정이 진동 변위 $y(t)$로 가진된다.



(a) 각 질량체에 대한 자유물체도(free-body diagram)를 그려라.



(b) Newton의 운동 법칙에 따라 운동방정식을 유도한 후, 운동방정식을 행렬(matrix)형태로 표현하여라.

(c) 감쇠기가 없고(즉 c = 0 이고) $y(t)$ = Y sinωt 일 때, m_1 질량체의 응답 $x_1(t)$의 진폭 X_1을 유도한 후, 이 진폭을 0으로 하기 위한 조건을 구하여라.

기 계 진 동 학 2015년 학기말시험 (가/나/다반) 해 답

1. $x(t_1) = 3.58$ mm, $x(t_3) = 0.26$ mm

(a) $\delta = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_{n+1})} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_3)} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3.58}{0.26} = 1.311$

$\Rightarrow \quad \zeta = \dfrac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \dfrac{1.311}{\sqrt{4\pi^2+1.311^2}} = 0.204$

($\zeta \approx \dfrac{\delta}{2\pi} = \dfrac{1.311}{2\pi} = 0.209$)

(b) $t_1 = 0.01$ s, $t_3 = 0.11$ s

$t_{n+1} - t_1 = n\,T$

$\Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{n}\,(t_{n+1} - t_1) = \dfrac{1}{2}\,(t_3 - t_1) = \dfrac{1}{2}\,(0.11 - 0.01)\text{ s} = 0.05\text{ s}$

$\omega_d = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{T} = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{0.05\text{ s}} = 125.66\text{ rad/s}$

$\omega_n = \dfrac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{125.66\text{ rad/s}}{\sqrt{1-0.204^2}} = 128.4\text{ rad/s}$

(c) $\delta = \ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\dfrac{x(t_2)}{x(t_3)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x(t_1)}{x(t_2)} = \dfrac{x(t_2)}{x(t_3)}$

$\Rightarrow \quad x(t_2) = \sqrt{x(t_1)\,x(t_3)} = \sqrt{(3.58\text{ mm})(0.26\text{ mm})} = 0.965\text{ mm}$

2. (a) O O.S. $= \dfrac{F_0}{k}\, e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, $t_s = \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$

(b) X 주로 스프링과 질량체를 사용

(c) O 내구성 시험 : 반복 하중, 시스템 진단 : 진동 계측

3. $F(t) = F_1\,\Phi(t-t_1) - (F_1-F_2)\,\Phi(t-t_2)$

$t > t_2$ 일 때

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$= \frac{F_1}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1)-\phi]\right\} - \frac{F_1-F_2}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_2)-\phi]\right\}$$

$$= \frac{F_2}{k} - \frac{F_1}{k}\,\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1)-\phi] + \frac{F_1-F_2}{k}\,\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_2)-\phi]$$

4. $k = 50$ N/m, $m = 2$ kg, $\zeta = 0.25$ $\Rightarrow$ $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{50\text{ N/m}}{2\text{ kg}}} = 5$ rad/s

$F_0(t) = 15$ N (계단함수 가진)

$$\Rightarrow \quad x_0(t) = \frac{F_0}{k} = \frac{15\text{ N}}{50\text{ N/m}} = 0.300\text{ m}$$

$$F_1^s(t) = -\frac{30}{\pi}\ \sin\pi t \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = -\frac{30}{\pi}, \quad \omega_T = \pi$$

$$x_n^s(t) = X_n^s\ \sin(n\omega_T t - \theta_n)$$

$$X_n^s = \frac{b_n/m}{\sqrt{[\omega_n^2-(n\omega_T)^2]^2+(2\zeta\omega_n n\omega_T)^2}}\ , \quad \theta_n = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n(n\omega_T)}{\omega_n^2-(n\omega_T)^2}$$

$$X_1^s = \frac{b_1/m}{\sqrt{[\omega_n^2-\omega_T^2]^2+(2\zeta\omega_n\omega_T)^2}} = -\frac{30}{2\pi}\ \frac{1}{\sqrt{(5^2-\pi^2)^2+[2\,(0.25)\,(5)\,(\pi)]^2}} = -0.280\text{ (m)}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n(\omega_T)}{\omega_n^2-(\omega_T)^2} = \tan^{-1}\frac{2\,(0.25)\,(5)(\pi)}{5^2-\pi^2} = \tan^{-1}(0.519) = 0.479\text{ rad}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^s(t) = -0.280\ \sin(\pi t - 0.479)\ \text{ m}$$

$$x_p(t) = 0.300 - 0.280\ \sin(\pi t - 0.479) - \cdots\ \text{ m} \quad (t \geq 0)$$

5. (a) $0 < t < a$ 일 때

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2\, x(t) = f_0 \cos\omega t \qquad (\omega \neq \omega_n)$$

$$L\text{ 변환} \Rightarrow \quad s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_0\,\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$X(s) = f_0\frac{s}{(s^2+\omega_n^2)(s^2+\omega^2)} = f_0\left[\frac{as+b}{s^2+\omega_n^2} + \frac{cs+d}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$(as+b)(s^2+\omega^2) + (cs+d)(s^2+\omega_n^2) = s$$

$$a + c = 0, \quad b + d = 0, \quad \omega^2 a + \omega_n^2 c = 1, \quad \omega^2 b + \omega_n^2 d = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = -a, \quad (\omega^2 - \omega_n^2)\ a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}, \quad c = -\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}$$

$$d = -b, \quad (\omega^2 - \omega_n^2)\ b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0, \quad d = 0$$

$$X(s) = \frac{f_0}{\omega^2-\omega_n^2}\left[\frac{s}{s^2+\omega_n^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{f_0}{\omega^2-\omega_n^2}\ L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega_n^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{f_0}{\omega^2-\omega_n^2}\ [\cos\omega_n t - \cos\omega t]$$

(b) $t > a$ 일 때

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_n^2\ x_2(t) = \hat{f}\ \delta(t-a) \qquad (a > 0)$$

<방법 1>

$$L \quad \Rightarrow \quad s^2 X_2(s) + \omega_n^2 X_2(s) = \hat{f}\,e^{-as} \qquad \Rightarrow \qquad X_2(s) = \frac{\hat{f}}{s^2+\omega_n^2}\ e^{-as} = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\,\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\ e^{-as}$$

$$L^{-1} \ \Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ \sin\omega_n(t-a)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{f_0}{\omega^2-\omega_n^2}\ [\cos\omega_n t - \cos\omega t] + \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ \sin\omega_n(t-a)$$

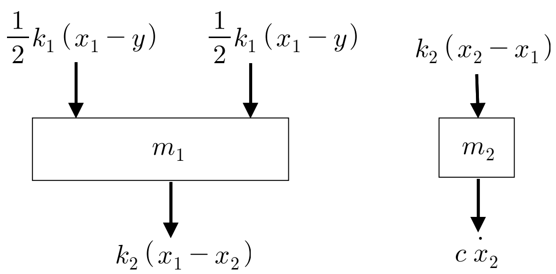
<방법 2>

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_3(t) + \omega_n^2\ x_3(t) = \hat{f}\ \delta(t), \quad x_2(t) = x_3(t-a)$$

$$L \quad \Rightarrow \quad s^2 X_3(s) + \omega_n^2 X_3(s) = \hat{f} \qquad \Rightarrow \qquad X_3(s) = \frac{\hat{f}}{s^2+\omega_n^2} = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\,\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$$

$$L^{-1} \ \Rightarrow \quad x_3(t) = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ \sin\omega_n t \qquad \Rightarrow \qquad x_2(t) = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ \sin\omega_n(t-a)$$

6. (a)



(b) $m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1-y) - k_2(x_1-x_2) \quad \Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = k_1y(t)$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1) - c\dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1y(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(c) $m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = k_1Y\sin\omega t$, $\quad m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0$

(특수)해의 형태

$x_1(t) = X_1\sin\omega t, \qquad x_2(t) = X_2\sin\omega t$

$\Rightarrow \quad -m_1\omega^2X_1 + (k_1+k_2)X_1 - k_2X_2 = k_1Y$, $\quad -m_2\omega^2X_2 - k_2X_1 + k_2X_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1Y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{vmatrix} = (k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2) - (-k_2)(-k_2)$$

$$= m_1m_2\left[\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}-\omega^2\right)\left(\frac{k_2}{m_2}-\omega^2\right)-\frac{k_2^2}{m_1m_2}\right] = m_1m_2\left[\left(\omega_I^2-\omega^2\right)\left(\omega_{II}^2-\omega^2\right)-\frac{k_2^2}{m_1m_2}\right]$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1Y & -k_2 \\ 0 & k_2-m_2\omega^2 \end{vmatrix} = k_1Y(k_2-m_2\omega^2) - 0 = k_1Y\,m_2\left(\omega_{II}^2-\omega^2\right)$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{k_1Y}{m_1}\frac{\omega_{II}^2-\omega^2}{(\omega_I^2-\omega^2)(\omega_{II}^2-\omega^2)-\dfrac{k_2^2}{m_1m_2}}$$

$\omega_{II}\left(= \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\right) = \omega$ 이면 $X_1 = 0$