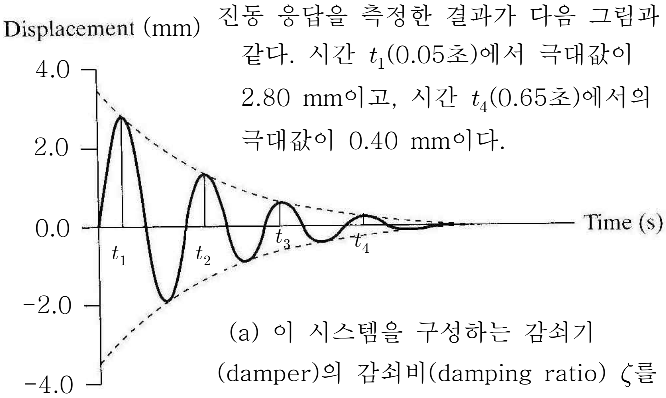
1.[4점] 1자유도 감쇠계의 질량체에 충격하중을 가한 후 진동 응답을 측정한 결과가 다음 그림과 같다. 시간 t_1(0.05초)에서 극대값이 2.80 mm이고, 시간 t_4(0.65초)에서의 극대값이 0.40 mm이다.



(a) 이 시스템을 구성하는 감쇠기 (damper)의 감쇠비(damping ratio) ζ를 구하여라.

(b) 이 시스템의 비감쇠(undamped) 고유진동수 ω_n을 구하여라.

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( )안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 부족감쇠(underdamped)계에 일정 크기의 계단함수 하중 F_0가 가해질 때 응답의 오버슛(overshoot)을 작게 하려면 감쇠비 ζ 값을 크게 하는 수밖에 없다. ( )

(b) 1자유도 감쇠계에서 충격하중이나 계단함수 하중과 같은 비주기적 가진력에 대한 정상상태(steady-state) 응답은 진동하지 않는다. ( )

(c) 스마트 폰의 Waveform Generator 앱을 사용하여 가진기(exciter, shaker)를 구동할 할 때, 조화가진 뿐만 아니라 다른 형태의 주기적 가진도 할 수 있다. ( )

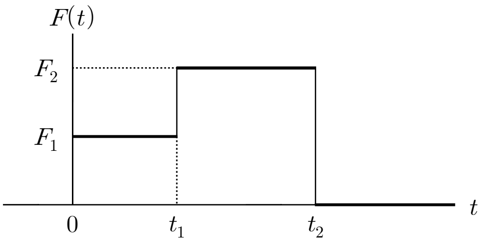
3.[4점] Consider the step response described by

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\} \qquad (t \ge t_0)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(a) Calculate the analytical value of the peak time t_p by noting that it occurs at the first peak, or critical point, of the curve.

(b) 그림과 같이 0부터 t_1시점까지 일정한 힘 F_1이 가해지고, t_1시점부터 t_2시점까지 일정한 힘 F_2가 가해진다.



위에 주어진 식을 사용하여, 부족감쇠계(0<ζ<1)인 경우에 t_2시점 이후에 관찰되는 응답 변위 $x(t)$를 표현하여라.

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$$L\{\delta(t)\} = 1, \qquad L\{\Phi(t)\} = \frac{1}{s}, \qquad L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

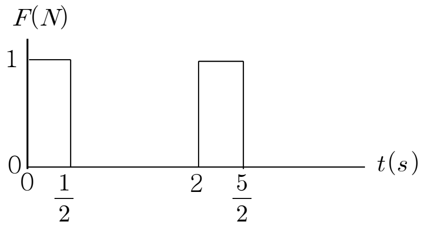
$$L\{\sin\ at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad L\{\cos\ at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

4.[4점] Calculate the harmonic response of the undamped system given by

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \sin\omega t \qquad (t>0) \qquad \omega \neq \omega_n$$

using the Laplace transform method. Assume that initial conditions are all zero.

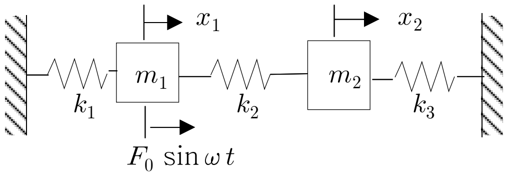
5.[5점] 다음과 같은 주기적 가진력 $F(t)$가 있다.



가진력 $F(t)$를 다음과 같이 Fourier 급수로 나타낼 때 Fourier 계수 a_0, a_n, b_n을 적분 계산하여 구하고, 급수를 전개한 형태로 0이 아닌 처음 4개 항을 표현하여라.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

6.[4점] 그림과 같은 2자유도계가 있다.



(a) 운동방정식을 유도한 후, 행렬(matrix)형태로 표현하여라.

(b) m_1 질량체의 응답 $x_1(t)$의 진폭 X_1을 유도한 후, 이 진폭을 0으로 하기 위한 조건을 구하여라.

기 계 진 동 학 　　　2014년 학기말시험 (가/나반) 　해 답

1. $x(t_1) = 2.80$ mm, $\quad x(t_4) = 0.40$ mm

(a)
$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t_1)}{x(t_{n+1})} = \frac{1}{3}\ln\frac{x(t_1)}{x(t_4)} = \frac{1}{3}\ln\frac{2.80}{0.40} = 0.649$$

$$\Rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0.649}{\sqrt{4\pi^2+0.649^2}} = 0.103$$

$$\left(\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.649}{2\pi} = 0.103 \right)$$

(b) $\quad t_1 = 0.05$ s, $\quad t_4 = 0.65$ s

$$t_{n+1} - t_1 = n\,T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{n}\,(t_{n+1} - t_1) = \frac{1}{3}\,(t_4 - t_1) = \frac{1}{3}\,(0.65 - 0.05)\ \text{s} = 0.20\ \text{s}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi\ \text{rad}}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{0.20\ \text{s}} = 31.42\ \text{rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{31.42\ \text{rad/s}}{\sqrt{1-0.103^2}} = 31.6\ \text{rad/s}$$

2. (a) X 　 O.S. $= \dfrac{F_0}{k}\, e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, 　 ζ를 크게 하거나 k를 크게 하면 O.S.가 작아짐.

(b) O 　 충격하중 $x_{ss} = 0$, 　 계단함수 하중 $x_{ss} = \dfrac{F_0}{k}$

(c) O 　 조화가진, 삼각파형 가진, 사각파형 가진, 톱니파형 가진 가능

3. (a) $x(t) = \dfrac{F_0}{k}\left\{1 - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0)-\phi]\right\}$ 　　 $\phi = \tan^{-1}\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k}\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\{\zeta\omega_n\cos[\omega_d(t-t_0)-\phi] + \omega_d\sin[\omega_d(t-t_0)-\phi]\}$$

$$\dot{x}(t_p) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \zeta\omega_n\cos[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] + \omega_d\sin[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] = 0$$

$$\tan[\omega_d(t_p-t_0)-\phi] = \frac{-\zeta\omega_n}{\omega_d} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_d(t_p-t_0)-\phi = n\pi + \tan^{-1}\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_d(t_p-t_0) = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad n = 1 \text{ 일 때,} \quad t_p - t_0 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

(b) $F(t) = F_1\,\Phi(t) + (F_2-F_1)\,\Phi(t-t_1) - F_2\,\Phi(t-t_2)$

$t > t_2$ 일 때

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\
&= \frac{F_1}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t-\phi)\right\} + \frac{F_2-F_1}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1)-\phi]\right\} \\
&\quad - \frac{F_2}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_2)-\phi]\right\} \\
&= -\frac{F_1}{k}\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t-\phi) - \frac{F_2-F_1}{k}\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1)-\phi] \\
&\quad + \frac{F_2}{k}\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_2)-\phi]
\end{aligned}$$

4. $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \sin\omega t \qquad (t>0) \quad \omega \neq \omega_n$

L 변환 $\Rightarrow \quad s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_0 \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$X(s) = f_0 \frac{\omega}{(s^2 + \omega_n^2)(s^2 + \omega^2)} = f_0 \left[\frac{as + b}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{cs + d}{s^2 + \omega^2} \right]$$

$$(as + b)(s^2 + \omega^2) + (cs + d)(s^2 + \omega_n^2) = \omega$$

$$a + c = 0, \quad b + d = 0, \quad \omega^2 a + \omega_n^2 c = 0, \quad \omega^2 b + \omega_n^2 d = \omega$$

$$\Rightarrow \quad c = -a, \quad (\omega^2 - \omega_n^2)\, a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0, \quad c = 0$$

$$d = -b, \quad (\omega^2 - \omega_n^2)\, b = \omega \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad d = -\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

$$X(s) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega_n^2} - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_n^2} L^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega_n} \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right] - \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_n^2} L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

$$= \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_n^2} \frac{\omega}{\omega_n} \sin\omega_n t - \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_n^2} \sin\omega t$$

$$= \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_n^2} \frac{\omega}{\omega_n} \sin\omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\omega t \qquad (t > 0)$$

5. $T = 2$ s, $\omega_T = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{T} = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{2 \text{ s}} = \pi$ rad/s

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\, dt = \frac{2}{2}\left\{ \int_0^{1/2} 1\, dt + \int_{1/2}^2 0\, dt \right\} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t) \cos n\omega_T t\, dt = \frac{2}{2}\left\{ \int_0^{1/2} \cos n\pi t\, dt + \int_{1/2}^2 0\, dt \right\}$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \right]_0^{1/2} = \frac{1}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & : n\text{이 짝수} \\ \dfrac{1}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & : n\text{이 홀수} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t) \sin n\omega_T t\, dt = \frac{2}{2}\left\{ \int_0^{1/2} \sin n\pi t\, dt + \int_{1/2}^2 0\, dt \right\}$$

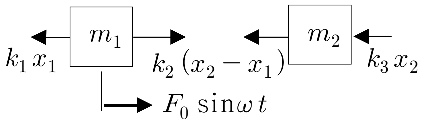
$$= \left[\frac{-1}{n\pi} \cos n\pi t \right]_0^{1/2} = \frac{-1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\pi} & : n\text{이 홀수} \\ \dfrac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^{\frac{n}{2}} \right] & : n\text{이 짝수} \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos\pi t + \sin\pi t) + \frac{1}{2\pi}(0 + 2\sin 2\pi t) + \cdots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\cos\pi t + \frac{1}{\pi}\sin\pi t + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi t + \cdots \quad \text{(N)}$$

6. (a) 자유물체도 (F. B. D.)



Newton의 운동 제2법칙

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + F_0 \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin\omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = - k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0$$

행렬(matrix) 형태

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(b) (특수)해의 형태

$$x_1(t) = X_1 \sin\omega t, \qquad x_2(t) = X_2 \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad -m_1 \omega^2 X_1 + (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 = F_0 \ , \quad -m_2 \omega^2 X_2 - k_2 X_1 + (k_2 + k_3) X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)\ (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) - (-k_2)\ (-k_2)$$

$$= m_1 m_2 \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \omega^2 \right) \left(\frac{k_2 + k_3}{m_2} - \omega^2 \right) - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} \right] = m_1 m_2 \left[\left(\omega_I^2 - \omega^2 \right) \left(\omega_{II}^2 - \omega^2 \right) - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} \right]$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = F_0\ (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) - 0 = F_0\ m_2\ \left(\omega_{II}^2 - \omega^2 \right)$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{F_0}{m_1} \frac{\omega_{II}^2 - \omega^2}{(\omega_I^2 - \omega^2)(\omega_{II}^2 - \omega^2) - \dfrac{k_2^2}{m_1 m_2}}$$

ω_{II} (= $\sqrt{\dfrac{k_2 + k_3}{m_2}}$) = ω 이면 $X_1 = 0$