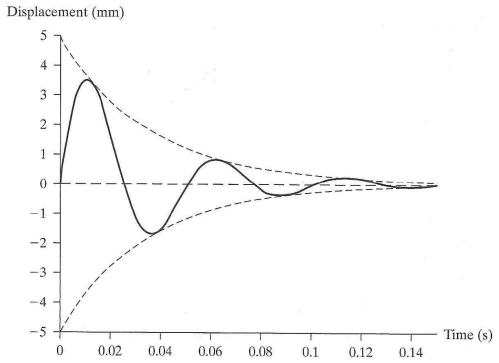
기 계 진 동 학 2013년 학기말시험 (가반) [27점] 2013. 6. 13.

1.[4점] 어떤 1자유도계가 정지해 있다가 충격하중을 받아 응답할 때 진동 변위를 관찰한 결과가 다음 그림과 같다. 첫번째 극대값이 3.4848 mm이고, 두번째 극대값이 0.8225 mm이다



(a) 감쇠비 ζ를 구하여라.

(b) 세 번째 극대값은 몇 mm이겠는가?

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 과도감쇠(overdamped)계의 계단함수 가진 응답에서 오버슛(overshoot)은 없고 감쇠비 ζ가 클수록 정착시간(settling time)은 길어진다. ( )

판단 근거 :

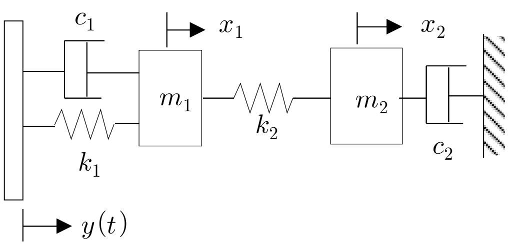
(b) 진동 센서로 사용되는 가속도계(accelerometer)는 고유진동수가 높을수록 측정 가능한 진동수 범위가 커지지만 출력 전기신호는 작아진다. ( )

판단 근거 :

(c) 진동 측정을 통해서 기계장치나 구조물의 이상 유무를 진단(diagnostics)할 수 있는데, 그 이유는 마모 또는 결함 발생에 의해 고유진동수나 감쇠가 변하기 때문이다. ( )

판단 근거 :

3.[4점] Consider a system shown below.



(a) Draw the free-body diagram for each mass.

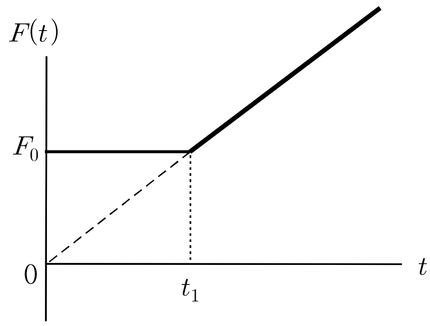
(b) Derive the equations of motion based on the Newton's second law of motion and express the equation in a matrix form.

4.[4점] Calculate the response of the undamped system given by

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \hat{f}\,\delta(t) + f_0 \qquad (t>0)$$

using the Laplace transform method. Assume that initial conditions are all zero.

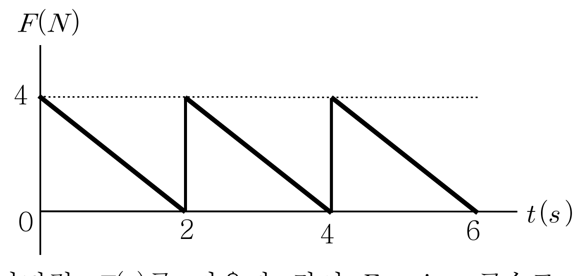
5.[4점] 질량이 m이고 감쇠비가 ζ이며, 비감쇠고유진동수가 ω_n이고 감쇠고유진동수가 ω_d인 1자유도계가 있다. 이 계의 질량체에 다음 그래프와 같이 가진력 $F(t)$가 가해질 때, 응답을 계산하는 적분 형태의 식을 제시하여라. (적분 계산 불필요)



(a) 관찰 시점이 0과 t_1 사이일 때

(b) 관찰 시점이 t_1 이후일 때

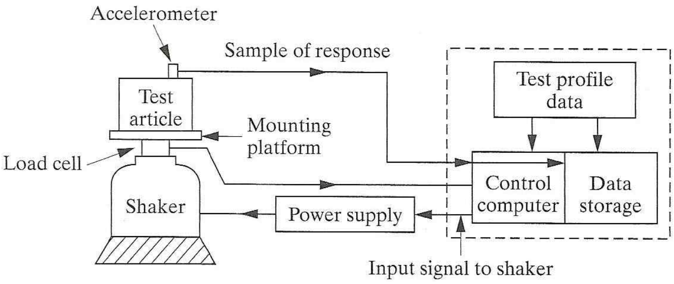
6.[5점] 다음과 같은 주기적 가진력 $F(t)$가 있다.



가진력 $F(t)$를 다음과 같이 Fourier 급수로 나타낼 때 Fourier 계수 a_0, a_n, b_n을 적분 계산하여 구하고, 급수를 전개한 형태로 0이 아닌 처음 3개 항을 표현하여라.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

1.[3점] 제품(test article)의 내구성(endurance) 검사를 위한 진동시험 장치를 그림과 같이 구성할 때, 세 가지 측정장비의 역할은 각각 무엇인지 서술하라.



① 가진기(shaker)
② 힘변환기(load cell)
③ 가속도계(accelerometer)

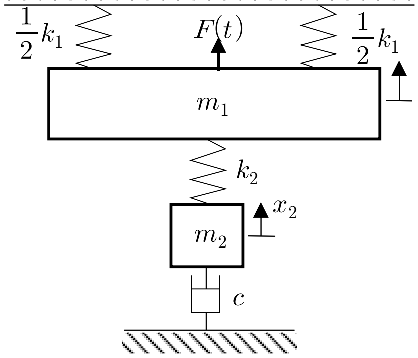
2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하여라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 부족감쇠(underdamped)계의 계단함수 가진 응답에서 감쇠비 ζ가 클수록 오버슛(overshoot)은 작아지지만 정점시간(peak time)과 정착시간(settling time)은 길어진다. ( )
판단 근거 :

(b) 질량이 1 kg인 물체에서 충격량이 1 N·s인 단위 임펄스에 대한 응답을 라플라스(Laplace)변환하여 표현하면 전달함수(transfer function)와 같다. ( )
판단 근거 :

(c) "중첩(superposition)의 원리"는 input과 output이 '선형(linear)'비례할 때 적용되는데, '선형'이란 '직선형'과 '곡선형'을 의미한다. ( )
판단 근거 :

3.[4점] Consider a system shown below.



(a) Draw the free-body diagram for each mass.

(b) Derive the equations of motion based on the Newton's second law of motion and express the equation in a matrix form.

4.[6점] 질량을 무시할 만한 고무줄에 집중질량체가 매달려 정지해 있다가 수직 아랫방향으로 충격하중을 받아 응답할 때 진동 변위를 관찰한 결과가 다음 식과 같다. 집중질량체의 잘량은 10 kg이다.

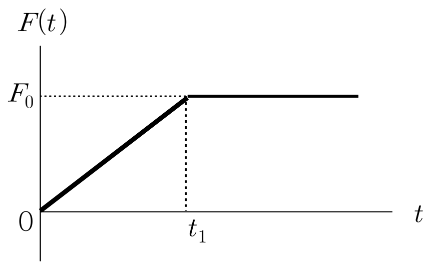
$$x(t) = (2\ \text{mm})\ e^{-28.148t}\ \sin(122.467\ t)$$

(a) 진동 주기 T는 몇 초인가?

(b) 감쇠비 ζ는 얼마인가?

(c) 충격하중의 크기는 몇 N·s인가?

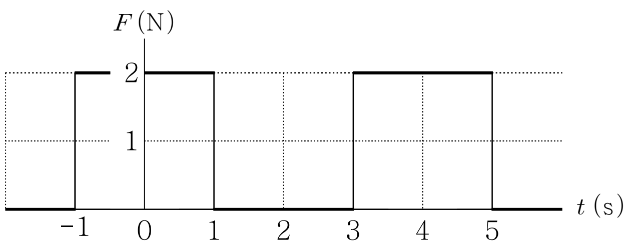
5.[4점] 질량이 m이고 감쇠비가 ζ이며, 비감쇠고유진동수가 ω_n이고 감쇠고유진동수가 ω_d인 1자유도계가 있다. 이 계의 질량체에 다음 그래프와 같이 가진력 $F(t)$가 가해질 때, 응답을 계산하는 적분 형태의 식을 제시하여라. (적분 계산 불필요)



(a) 관찰 시점이 0과 t_1 사이일 때

(b) 관찰 시점이 t_1 이후일 때

6.[4점] 다음과 같은 주기적 가진력 $F(t)$가 있다.



가진력 $F(t)$를 다음과 같이 Fourier 급수로 나타낼 때 Fourier 계수 a_0, a_n, b_n을 적분 계산하여 구하고, 급수를 전개한 형태로 0이 아닌 처음 3개 항을 표현하여라.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

기 계 진 동 학 　　　　 2013년 학기말시험 (가반) 　 해 답

1. $x(t_1) = 3.4848$ mm, $x(t_2) = 0.8225$ mm

(a) $\delta = \ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\dfrac{3.4848}{0.8225} = 1.444$

$$\Rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{1.444}{\sqrt{4\pi^2 + 1.444^2}} = 0.224$$

(b) $\delta = \ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\dfrac{x(t_2)}{x(t_3)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x(t_1)}{x(t_2)} = \dfrac{x(t_2)}{x(t_3)}$

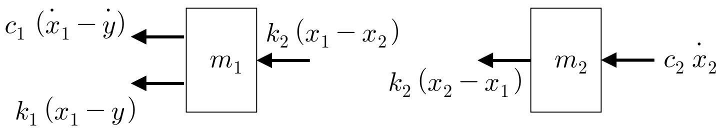
$$\Rightarrow \quad x(t_3) = x(t_2)\frac{x(t_2)}{x(t_1)} = (0.8225\ \text{mm})\ \frac{0.8225}{3.4848} = 0.1941\ \text{mm}$$

2. (a) O 　　 ζ=1.5일 때의 그래프와 ζ=2일때의 그래프 비교

(b) O 　　 압전소자 질량 작으면 고유진동수 높고, 감도 낮아짐.

(c) O 　　 마모에 의해 질량 변화, 결합에 의해 강성 또는 감쇠 변화

3. (a)



(b) $m_1\ddot{x}_1 = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{y}) - k_1(x_1 - y) - k_2(x_1 - x_2)$

$$\Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = c_1\dot{y} + k_1y \qquad \cdots ①$$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2\dot{x}_2$

$$\Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \qquad \cdots ②$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1\dot{y} + k_1y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \hat{f}\,\delta(t) + f_0$

L 변환 $\Rightarrow \quad s^2X(s) + \omega_n^2X(s) = \hat{f} + f_0\dfrac{1}{s}$

$$X(s) = \hat{f}\frac{1}{s^2 + \omega_n^2} + f_0\frac{1}{s^2 + \omega_n^2}\frac{1}{s} = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} + f_0\left[\frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$a(s^2 + \omega_n^2) + (bs + c)s = 1$$

$$a + b = 0, \quad c = 0, \quad {\omega_n}^2 a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\omega_n^2}, \quad b = -a = -\frac{1}{\omega_n^2}$$

$$X(s) = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{f_0}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ L^{-1}\left[\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right] + \frac{f_0}{\omega_n^2}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$= \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ L^{-1}\left[\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right] + \frac{f_0}{\omega_n^2}\ \{ L^{-1}[\frac{1}{s}] - L^{-1}[\frac{s}{s^2+\omega_n^2}] \}$$

$$= \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ \sin\omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2}\ [\ \Phi(t) - \cos\omega_n t\ ]$$

$$= \frac{\hat{f}}{\omega_n}\ \sin\omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2}\ [\ 1 - \cos\omega_n t\ ] \qquad (t>0)$$

5. (a) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F(\tau)\ e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F_0\ e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

또는 $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F(t-\tau)\ e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F_0\ e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

(b) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\left[\displaystyle\int_0^{t_1} F_0\ e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau + \int_{t_1}^t \frac{F_0}{t_1}\tau\ e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau\right]$

또는

$0 < t-\tau < t_1 \quad \Rightarrow \quad -t < -\tau < t_1 - t \quad \Rightarrow \quad t > \tau > t - t_1$

$t_1 < t-\tau < t \quad \Rightarrow \quad t_1 - t < -\tau < 0 \quad \Rightarrow \quad t - t_1 > \tau > 0$

$x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\left[\displaystyle\int_{t-t_1}^t F_0\ e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau + \int_0^{t-t_1}\frac{F_0}{t_1}(t-\tau)\ e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau\right.$

6. $y(t) = 4 - 2\ t \qquad (0\le t\le 2) \qquad\qquad \omega_T = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt = \frac{2}{2}\int_0^2 (4-2t)\,dt = \left[4t - t^2\right]_0^2 = 4$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_T t\,dt = \frac{2}{2}\int_0^2 (4-2t)\cos n\pi t\ dt$$

$$= 4\cdot 0 - 2\left\{\left[\frac{1}{n\pi}t\ \sin n\pi t\right]_0^2 - \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \sin n\pi t\,dt\right\} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_T t\,dt = \frac{2}{2}\int_0^2 (4-2t)\sin n\pi t\ dt$$

$$= 4\cdot 0 - 2\left\{\left[\frac{-1}{n\pi}t\ \cos n\pi t\right]_0^2 - \frac{-1}{n\pi}\int_0^2 \cos n\pi t\,dt\right\} = \frac{4}{n\pi}\cos 2n\pi = \frac{4}{n\pi}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_T t + b_n\sin n\omega_T t)$$

$$= 2 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sin n\pi t = 2 + \frac{4}{\pi}\ \sin\pi t + \frac{4}{2\pi}\ \sin 2\pi t$$

기 계 진 동 학 　　　　　 2013년 학기말시험 (나반) 　 해 답

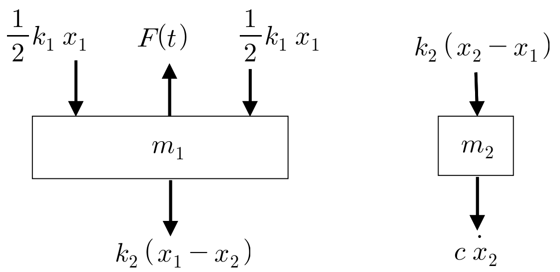
1. (서술, 핵심어)
   ① 전기신호에 따른 진동발생, 가진
   ② 힘(가진력) 감지하여 전기신호로 변환
   ③ 진동 가속도 감지하여 전기신호로 변환

2. (a) X 　 $t_s \approx \dfrac{3.5}{\zeta\,\omega_n}$, 감쇠비 ζ가 클수록 정착시간 t_s는 짧아짐

   (b) O 　 $F(s) = L[\delta(t)] = 1$, $H(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = X(s)$

   (c) X 　 선형비례 = 정비례, 1차함수 등

3. (a)



   (b) $m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F(t) \quad \Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F(t)$

   $m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c\,\dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + c\,\dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. (a) $\omega_d = 122.467$ rad/s,

$$T = \frac{2\pi\,\text{rad}}{\omega_d} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{122.467\ \text{rad/s}} = 0.0513\ \text{s}$$

   (b) $\zeta\omega_n = 28.148$ rad/s

$$\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = Z = \frac{122.467\ \text{rad/s}}{28.148\ \text{rad/s}} = 4.351$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4.351^2}} = 0.224$$

   (c) $x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t)$

$$\dot{x}(0) = \frac{\hat{F}}{m} = \omega_d\ A$$

$$\Rightarrow \quad \hat{F} = m\,\omega_d\,A = (10\ \text{kg})(122.467\ \text{rad/s})(0.002\ \text{m}) = 2.45\ \text{N}\cdot\text{s}$$

5. (a) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t \dfrac{F_0}{t_1}\tau\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

또는 $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t \dfrac{F_0}{t_1}(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

(b) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\left[\displaystyle\int_0^{t_1}\dfrac{F_0}{t_1}\tau\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau + \displaystyle\int_{t_1}^t F_0\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau\right]$

또는

$0 < t-\tau < t_1 \quad\Rightarrow\quad -t < -\tau < t_1 - t \quad\Rightarrow\quad t > \tau > t - t_1$

$t_1 < t-\tau < t \quad\Rightarrow\quad t_1 - t < -\tau < 0 \quad\Rightarrow\quad t - t_1 > \tau > 0$

$x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\left[\displaystyle\int_{t-t_1}^t \dfrac{F_0}{t_1}(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau + \displaystyle\int_0^{t-t_1} F_0\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau\right]$

6. $T = 4$ s, $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{4\text{ s}} = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s

$-1<t<1$에서 $F(t) = 2$ N, $1<t<3$에서 $F(t) = 0$

$a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)\,dt = \dfrac{2}{4}\left\{\int_{-1}^1 (2)\,dt + \int_1^3 (0)\,dt\right\} = \dfrac{2}{4}\{(2)(2) + 2(0)\} = 2$

$a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)\cos n\omega_T t\,dt = \dfrac{2}{4}\left\{\int_{-1}^1 (2)\cos\dfrac{n\pi t}{2}\,dt + \int_1^3 (0)\cos\dfrac{n\pi t}{2}dt\right\}$

$= \dfrac{2}{4}\left\{\dfrac{4}{n\pi}\left[\sin\dfrac{n\pi t}{2}\right]_{-1}^1 + 0\right\} = \dfrac{2}{n\pi}\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2} - \sin\dfrac{-n\pi}{2}\right\} = \dfrac{4}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

$a_1 = \dfrac{4}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi}$, $\quad a_2 = \dfrac{4}{2\pi}\sin\pi = 0$, $\quad a_3 = \dfrac{4}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{4}{3\pi}$

$b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)\sin n\omega_T t\,dt = \dfrac{2}{4}\left\{\int_{-1}^1 (2)\sin\dfrac{n\pi t}{2}\,dt + \int_1^3 (0)\sin\dfrac{n\pi t}{2}dt\right\}$

$= \dfrac{2}{4}\left\{\dfrac{-4}{n\pi}\left[\cos\dfrac{n\pi t}{2}\right]_{-1}^1 + 0\right\} = \dfrac{2}{n\pi}\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2} - \cos\dfrac{-n\pi}{2}\right\} = 0$

$F(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_T t + b_n\sin n\omega_T t\right) = \dfrac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\dfrac{n\pi t}{2} + 0\right]$

$= 1 + \dfrac{4}{\pi}\cos\dfrac{\pi t}{2} - \dfrac{4}{3\pi}\cos\dfrac{3\pi t}{2} + \cdots$ (N)