기 계 진 동 학 　 2012년 학기말시험 (가반) [27점] 　 2012. 6. 15.

1.[2점] 진동실험에 사용되는 측정기기 중에 변환기(transducer)가 있다. 변환기란 무엇인지 서술하고, 변환기의 예를 2개 제시하여라.

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 과도감쇠(overdamped)계의 계단함수 가진 응답에서 감쇠비가 커질수록 정착시간(settling time)이 길어진다.

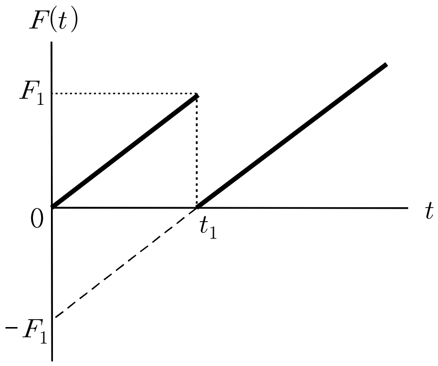
(　)

(b) 부족감쇠(underdamped)계에서 충격(impulse)에 대한 응답을 관찰하여 진동해석에 필요한 감쇠비 값을 알아낼 수 있다.

(　)

(c) 진동실험에 사용되는 측정장비 중에 신호발생기(signal generator)가 있다. 이것은 진동을 감지하여 전기적 신호로 변환시키는 장치이다. (　)

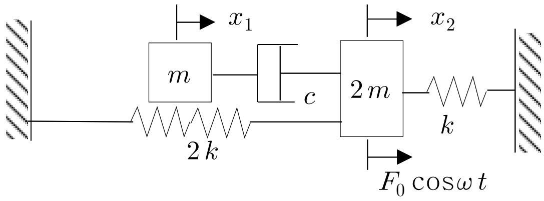
3.[1+2점] 질량이 m이고 감쇠비가 ζ이며, 비감쇠고유진동수가 ω_n이고 감쇠고유진동수가 ω_d인 1자유도계가 있다. 이 계의 질량체에 다음 그래프와 같이 가진력 $F(t)$가 가해질 때, 응답을 계산하는 적분 형태의 식을 제시하여라. (적분 계산 불필요)



(a) 관찰 시점이 0과 t_1 사이일 때

(b) 관찰 시점이 t_1 이후일 때

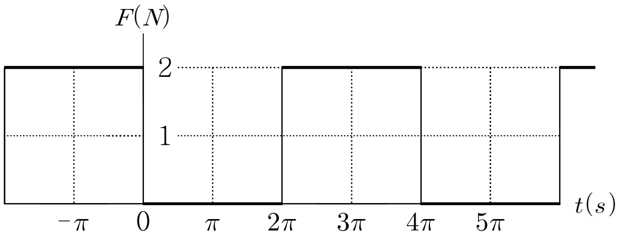
4.[4점] Consider the system shown below.



(a) Draw the free-body diagram for each mass.

(b) Derive the equations of motion based on the Newton's second law of motion, and express the equation in a matrix form.

5.[6점] (a) 다음 그림과 같은 주기적 가진력 $F(t)$의 Fourier 계수를 구하고, Fourier 급수를 전개한 형태로 0이 아닌 처음 3개 항을 표현하라.



(b) 강성이 50 N/m인 스프링에 2 kg 질량체가 매달린 1자유도 비감쇠계에서 질량체에 다음과 같은 주기적 가진력이 가해질 때, 정상상태 응답 변위 $x(t)$를 구하여라.

$$F(t) = 2 + \frac{8}{\pi}\cos\frac{t}{2} + \frac{8}{3\pi}\cos\frac{3}{2}t + \cdots \text{ (N)}$$

6.[6점] Calculate the response of the undamped system given by

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 e^{-bt}$$

using the Laplace transform method. Assume that $b > 0$ and that initial conditions are all zero.

기 계 진 동 학 　 2012년 학기말시험 (나반) [27점] 　 2012. 6. 15.

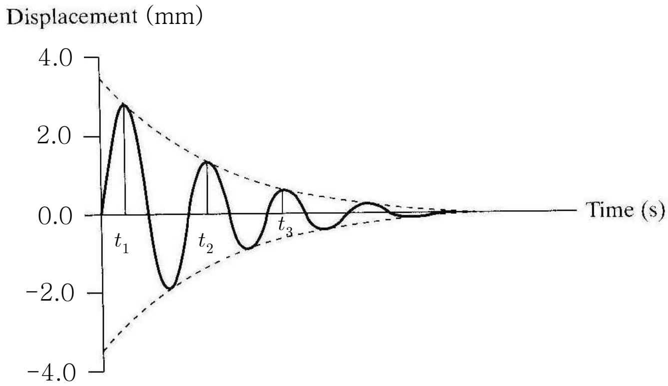
1.[2점] 비감쇠 진동 흡진기(vibration absorber)의 '개념'과 '원리'를 <u>서술</u>하여라.

2.[4점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하여라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 진동실험에 사용되는 계측시스템 중에 오실로스코프(oscilloscope)가 있다. 이것은 계측 중 신호조정 단계에서 사용되는 것으로서, 역학적 진동이 전기적 형태로 변환된 신호를 받아 증폭 또는 여과하는 장치이다. ( )

(b) 진동 측정에 의해 시스템 진단(diagnostics)을 하는 원리는 베어링이나 터빈 등의 기계장치가 정상일 때에는 진동이 없다가 이상 발생 때 진동하는 현상을 관찰하는 것이다. ( )

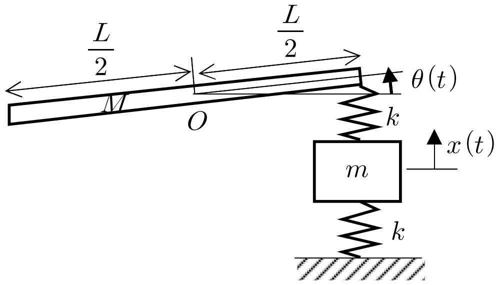
3.[4점] 어떤 1자유도 감쇠계에서 질량이 4 kg인 질량체에 충격(impulse)을 가하여 자유응답을 측정한 결과가 다음 그림과 같다. 시각 t_1(0.1초)에서 극대값이 2.5 mm이고, 시각 t_2(0.5초)에서의 극대값이 1.1 mm이다. 또한 t=0일 때 그래프의 기울기는 260 mm/s이다.



(a) 이 시스템을 구성하는 감쇠기(damper)의 감쇠비(damping ratio) 값을 구하여라.

(b) 자유응답을 일으킨 충격하중의 충격량은 몇 N·s인가?

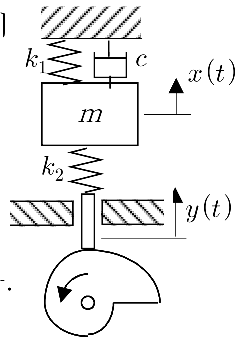
4.[2+3점] 그림과 같은 2자유도계가 있다. 질량이 M이고 길이가 L인 균일한 막대의 한 쪽 끝이 스프링과 질량체에 결합되어있다. 막대의 회전축은 질량중심에 있다. 막대가 수평으로 놓인 상태에서 정적 평형 위치를 기준으로, 질량체의 수직 변위를 $x(t)$라 하고, 막대의 회전각을 $\theta(t)$라 한다. 질량 중심에 대한 막대의 질량관성모멘트 J_0는 $\frac{1}{12}ML^2$ 이다. 중력은 결과에 영향을 주지 않으므로 고려하지 않는다.

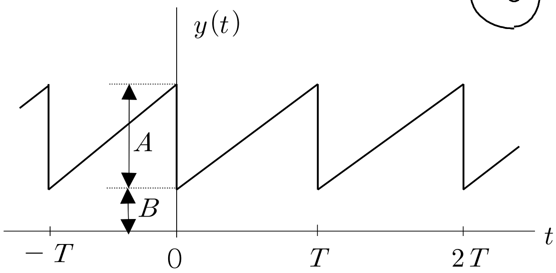


(a) 막대와 질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 각각 그려라.

(b) $x(t)$와 $\theta(t)$로 표현되는 운동방정식을 Newton의 운동 제2법칙에 따라 유도한 후, 행렬(matrix) 형태로 표현하여라.

5.[4+2점] (a) 자동차 엔진의 흡기 밸브를 여닫는 캠이 그림과 같이 시스템의 끝에 있는 막대에 변위 $y(t)$를 가해준다.
캠이 가해주는 변위 $y(t)$가 다음 그림과 같은 톱니 모양일 때, $y(t)$를 Fourier급수 형태로 표현하여라.





(b) 다음과 같이 3개항의 합으로 표현되는 가진력 $F(t)$를 그래프에 나타내어라. (시간 범위 2초까지)

$$F(t) = 1 - \sin\pi t - \frac{1}{2}\sin 2\pi t \qquad \text{(N)}$$

6.[6점] Calculate the response of the undamped system given by

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \qquad (t > 0)$$

using the Laplace transform method. Here f_0 is constant and initial conditions are all zero.

기 계 진 동 학 　　　　2012년 학기말시험 (가반)　　해 답

1. 서술 (핵심어 : 전기 신호와 역학적 운동 간 변환)
   예 : 가속도계, 마이크로폰, 스피커, 의료용 초음파 트랜스듀서, …

2. (a) O　　　과도감쇠계의 계단함수 하중 응답 그래프 (실습4 결과)

   (b) O　　　충격하중 응답 = 자유응답

   (c) X　　　특정 함수 모양의 전기신호를 발생시키는 장치

3. (a) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t \frac{F_1}{t_1}\tau\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

   또는　$x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t \frac{F_1}{t_1}(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

   (b) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\left[\displaystyle\int_0^{t_1} \frac{F_1}{t_1}\tau\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau + \int_{t_1}^{t}\left(\frac{F_1}{t_1}\tau - F_1\right) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau\right]$

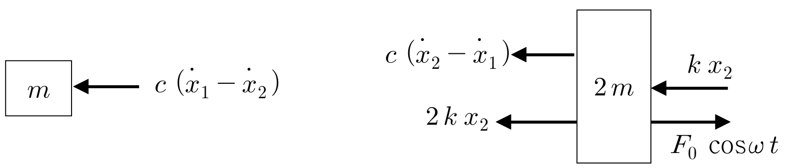
   또는

   $0 < t-\tau < t_1 \quad\Rightarrow\quad -t < -\tau < t_1 - t \quad\Rightarrow\quad t > \tau > t - t_1$

   $t_1 < t-\tau < t \quad\Rightarrow\quad t_1 - t < -\tau < 0 \quad\Rightarrow\quad t - t_1 > \tau > 0$

   $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\left[\displaystyle\int_{t-t_1}^{t} \frac{F_1}{t_1}(t-\tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau + \int_0^{t-t_1}\left(\frac{F_1}{t_1}(t-\tau) - F_1\right) e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\,d\tau\right]$

4. (a)



   (b) $m\ddot{x}_1 = -c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \qquad\Rightarrow\qquad m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 = 0$

   $2m\ddot{x}_2 = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - 3k\,x_2 + F_0\cos\omega t$

   $\Rightarrow\qquad 2m\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 + 3k\,x_2 = F_0\cos\omega t$

   $$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0\cos\omega t \end{Bmatrix}$$

5. (a) $T = 4\pi,\quad \omega_T = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2},\qquad 0<t<2\pi$에서 $F(t) = 0,\quad 2\pi<t<4\pi$에서 $F(t) = 2$ N

   $$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt = \frac{2}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi}(0)\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi}(2)\,dt\right\} = \frac{2}{4\pi}\{0 + 2(2\pi)\} = 2$$

   $$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_T t\,dt = \frac{2}{4\pi}\left\{0 + \int_{2\pi}^{4\pi}(2)\cos\frac{nt}{2}\,dt\right\}$$

   $$= \frac{1}{2\pi}\left\{0 + \frac{4}{n}\left[\sin\frac{nt}{2}\right]_{2\pi}^{4\pi}\right\} = \frac{2}{n\pi}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_T t\,dt = \frac{2}{4\pi}\left\{0 + \int_{2\pi}^{4\pi}(2)\sin\frac{nt}{2}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{0 - \frac{4}{n}\left[\cos\frac{nt}{2}\right]_{2\pi}^{4\pi}\right\} = \frac{-2}{n\pi}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\} = \frac{-2}{n\pi}\{1-(-1)^n\}$$

$$b_1 = \frac{-2}{\pi}\{1-(-1)\} = -\frac{4}{\pi},\quad b_2 = \frac{-2}{2\pi}\{1-1\} = 0,\quad b_3 = \frac{-2}{3\pi}\{1-(-1)\} = -\frac{4}{3\pi}$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t\right) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[0 + b_n\sin\frac{nt}{2}\right]$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi}\sin\frac{t}{2} - \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3t}{2} - \cdots \quad \text{(N)}$$

(b) $k = 50$ N/m, $m = 2$ kg $\Rightarrow$ $\omega_n = \sqrt{\dfrac{50\ \text{N/m}}{2\ \text{kg}}} = 5$ rad/s

$F_0(t) = 2$ N (계단함수 가진)

$$\Rightarrow\ x_0(t) = \frac{F_0}{k} = \frac{2\ \text{N}}{50\ \text{N/m}} = 0.04\ \text{m}$$

$$x_n^c(t) = \frac{a_n/m}{\sqrt{[\omega_n^2-(n\omega_T)^2]^2+(2\zeta\omega_n n\omega_T)^2}}\cos(n\omega_T t - \theta_n) = \frac{a_n/m}{|\omega_n^2-(n\omega_T)^2|}\cos(n\omega_T t)$$

$$F_1^c(t) = \frac{8}{\pi}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow\ x_1^c(t) = \frac{\frac{8}{\pi}\ \text{N}}{2\ \text{kg}}\frac{1}{|(5\ \text{rad/s})^2-(\frac{1}{2}\ \text{rad/s})^2|}\cos\frac{t}{2} = 0.05144\cos\frac{t}{2}\quad \text{m}$$

$$F_2^c(t) = \frac{8}{3\pi}\cos\frac{3t}{2}$$

$$\Rightarrow\ x_2^c(t) = \frac{\frac{8}{3\pi}\ \text{N}}{2\ \text{kg}}\frac{1}{|(5\ \text{rad/s})^2-(\frac{3}{2}\ \text{rad/s})^2|}\cos\frac{3t}{2} = 0.01866\cos\frac{3t}{2}\quad \text{m}$$

$$x(t) = 0.04 + 0.05144\cos\frac{t}{2} + 0.01866\cos\frac{3t}{2}\quad \text{m}$$

6. $\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 e^{-bt}$

L 변환 $\Rightarrow$ $s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_0\dfrac{1}{s+b}$

$$X(s) = f_0\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\frac{1}{s+b} = f_0\left[\frac{A}{s+b}+\frac{Bs+C}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$A(s^2+\omega_n^2) + (Bs+C)(s+b) = 1$$

$$A + B = 0,\quad bB + C = 0,\quad \omega_n^2 A + bC = 1$$

$$\rightarrow B = -A,\quad C = -bB = bA,\quad \omega_n^2 A + b^2 A = 1$$

$$A = \frac{1}{\omega_n^2 + b^2},\quad B = -\frac{1}{\omega_n^2+b^2},\quad C = \frac{b}{\omega_n^2+b^2}$$

$$X(s) = \frac{f_0}{\omega_n^2+b^2}\left[\frac{1}{s+b} - \frac{s-b}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n^2+b^2}\left[\frac{1}{s+b} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2} + \frac{b}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)]$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n^2+b^2}\left[e^{-bt} - \cos\omega_n t + \frac{b}{\omega_n}\sin\omega_n t\right]$$

기 계 진 동 학 2012년 학기말시험 (나반) 해 답

1. 개념 (서술 핵심사항 : 감쇠기를 사용하지 않고 진동을 흡수하는 장치)

   원리 (서술 핵심사항 : 외력의 구동진동수가 외력이 가해지지 않는 질점의 고유진동수와 일치, 외력이 가해지는 질점의 진폭이 0)

2. (a) X 오실로스코프는 판독-기록 단계에 사용

   (b) X 정상일 때의 진동에 비하여 이상 있을 때 변화한 신호를 관찰

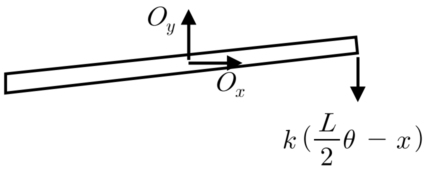
3. (a) $\delta = \ln\dfrac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\dfrac{2.5}{1.1} = 0.821$

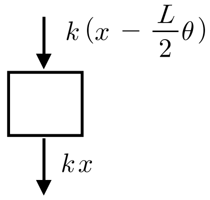
   $\Rightarrow \quad \zeta = \dfrac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \dfrac{0.821}{\sqrt{4\pi^2 + 0.821^2}} = 0.130$

   (b) $\dot{x}(0) = 260$ mm/s $= 0.26$ m/s

   $\hat{F} = m\,\dot{x}(0) = (4\text{ kg})\,(0.26\text{ m/s}) = 1.04\text{ kg·m/s} = 1.04\text{ N·s}$

4. (a)





(b) $m\,\ddot{x} = -kx - k(x - \frac{L}{2}\theta) = -2\,k\,x + \frac{1}{2}kL\,\theta$

$$\Rightarrow \quad m\,\ddot{x} + 2\,k\,x - \frac{1}{2}kL\,\theta = 0 \qquad \cdots ①$$

$J_0\,\ddot{\theta} = -\,k(\frac{L}{2}\theta - x)\frac{L}{2} = \frac{1}{2}kL\,x - k\left(\frac{L}{2}\right)^2\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{12}ML^2\,\ddot{\theta} - \frac{1}{2}kL\,x + \frac{1}{4}kL^2\theta = 0 \quad \cdots ②$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \dfrac{ML^2}{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -\dfrac{kL}{2} \\ -\dfrac{kL}{2} & \dfrac{kL^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. (a) $y(t) = \dfrac{A}{T}t + B \qquad (0 \le t \le T) \qquad \omega_T = \dfrac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T (B+\frac{A}{T}t)\,dt = \frac{2}{T}(BT+\frac{A}{2T}T^2) = 2B + A$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_T t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T\left(B+\frac{A}{T}t\right)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left\{B\cdot 0 + \frac{A}{T}\left(\left[\frac{T}{2\pi n}t\ \sin\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^T - \frac{T}{2\pi n}\int_0^T \sin\frac{2\pi n}{T}t\,dt\right)\right\} = 0$$

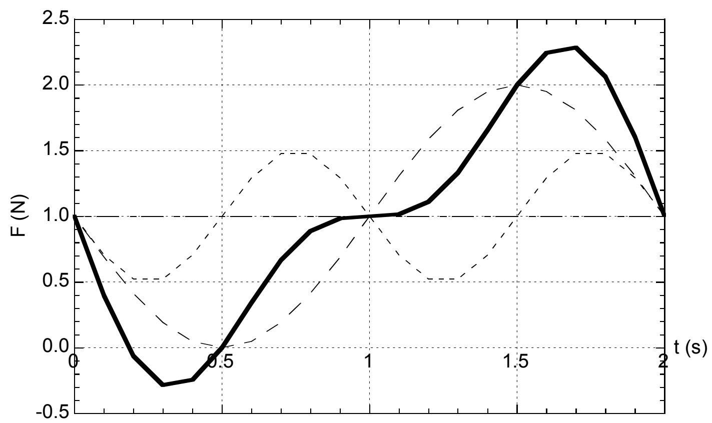
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_T t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T\left(B+\frac{A}{T}t\right)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left\{B\cdot 0 + \frac{A}{T}\left(\left[-\frac{T}{2\pi n}t\ \cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^T + \frac{T}{2\pi n}\int_0^T \cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{T}\frac{A}{T}\left(-\frac{T}{2\pi n}\right)(T-0) = -\frac{A}{\pi n}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t) = \left(B+\frac{A}{2}\right) - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{2\pi n}{T}t$$

(b)



6. $\ddot{x}(t) + \omega_n^2\, x(t) = f_0$

L 변환 $\Rightarrow \quad s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = f_0\,\dfrac{1}{s}$

$$X(s) = f_0\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\frac{1}{s} = f_0\left[\frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$a(s^2+\omega_n^2) + (bs+c)s = 1$$

$$a + b = 0, \qquad c = 0, \qquad \omega_n{}^2\ a = 1 \ \Rightarrow\ a = \frac{1}{\omega_n^2}, \qquad b = -a = -\frac{1}{\omega_n^2}$$

$$X(s) = \frac{f_0}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{f_0}{\omega_n^2}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right]$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n^2}\ \{\ L^{-1}[\frac{1}{s}] - L^{-1}[\frac{s}{s^2+\omega_n^2}]\ \}$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n^2}\ [\ \Phi(t) - \cos\omega_n t\ ]$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n^2}\ [\ 1 - \cos\omega_n t\ ] \qquad (t>0)$$