기 계 진 동 학 2012년 시험1 (가반) [26점] 2012. 4. 6.

1.[2점] '기계진동학(mechanical vibration)' 과목 명칭에서 '기계'의 의미는 무엇이며, 과목 명칭을 짧게 '진동학(vibration)'이라고 하지 않는 이유는 무엇인지 서술하라.

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 1자유도 부족감쇠(underdamped)계에서 감쇠비(damping ratio)가 클수록 자유응답의 주기가 길어진다. ( )

(b) 1자유도 비감쇠(undamped)계의 자유응답을 $x(t) = a_1 e^{j\omega_n t} + a_2 e^{-j\omega_n t} = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$ 라고 표현할 때 a_1, a_2, A_1, A_2는 실수(real number)이다. ( )

(c) 원판과 회전축으로 이루어져 회전 진동 하는 1자유도계에서, 회전축의 비틀림 강성 (torsional stiffness)의 단위는 N·m/rad 이다. ( )

3.[6점] Consider a 1-DOF (degree-of-freedom) spring-mass-damper system.

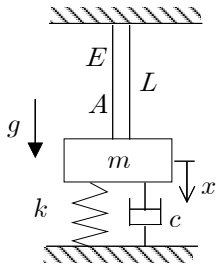
(a) The system has a mass of 9.50 kg, damping coefficient of 320 N/(m/s), and stiffness of 19800 N/m. Calculate the oscillating period T in s for the underdamped system.

(b,c) The free response has the following form.

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

For the system with the undamped natural frequency ω_n = 1900 rad/s and the damping ratio ζ = 0.250, determine A in mm and ϕ in radian when the initial displacement x_0 is 8.50 mm and the initial velocity v_0 is -6200 mm/s.

4.[4점] 질량 m인 집중질량체가 그림과 같이 세 개의 다른 요소와 결합되어 있다. 세 요소의 질량은 무시된다. 스프링의 강성 k, 댐퍼(damper)의 감쇠계수 c, 종진동 가능한 막대의 탄성계수 E, 단면적 A, 길이 L가 주어져 있다.

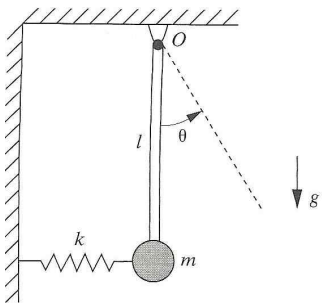


(a) 중력의 영향을 받는 정적 처짐 δ 상태의 자유물체도(free-body diagram)를 그리고, 정적 평형 식을 제시하라. (자유물체도에 힘 표기가 포함되어야 함.)

(b) 중력의 영향을 받는 정적 평형 상태로부터 변위 $x(t)$로 진동할 때의 자유물체도를 그리고, 운동방정식을 유도하라.

5.[2점] 소음을 측정할 때, Pa 단위로 음압(sound pressure)이 2배인 소음은 dB 단위로는 몇 dB 더 크겠는가?

6.[6점] 다음 그림에 보인 단진자(pendulum)의 운동방정식을 (a) 에너지방법과 (b) 뉴튼법칙으로 유도하라. 단진자 줄의 질량을 무시하고, 회전각 θ가 상당히 작으며 스프링은 수평방향으로만 변형된다고 가정함.



(a) 에너지방법

(b) 뉴튼의 운동 제2법칙 (힌트 : $\Sigma M_O = J\ddot{\theta}$)

기 계 진 동 학 2012년 시험1 (나반) [26점] 2012. 4. 6.

1.[2점] 기계공학(mechanical engineering) 교과과정 이수체계에서 '동역학(dynamics)' 과목과 '기계진동학(mechanical vibration)'과목은 선수·후수 과목의 관계이다. 두 과목의 공통점과 차이점을 각각 서술하라.

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 1자유도 비감쇠(undamped)계의 자유응답을

$$x(t) = A\ \sin(\omega_n t + \phi_1) = B\ \cos(\omega_n t - \phi_2)$$

라고 표현할 때, $A = B$ 이고 $\phi_1 = \phi_2$ 이다. ( )

(b) 단순조화진동에서 진폭(amplitude)을 표기하는 방법 중 rms 진폭(x_{rms})은 peak-to-peak 진폭($x_{\mathrm{p-p}}$)보다 항상 작다. ( )

(c) 부정적 진동을 억제하는 설계를 하는 경우에 응답 모양이 부족감쇠운동보다 과도감쇠운동이 되도록 한다. ( )

3.[6점] Consider a 1-DOF (degree-of-freedom) spring-mass-damper system.

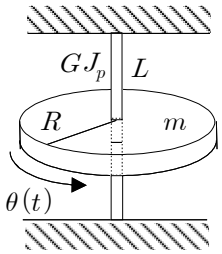
(a) The system has a mass of 8.80 kg, damping coefficient of 240 N/(m/s), and stiffness of 17500 N/m. Calculate the damped natural frequency f_d in Hz.

(b,c) The free response has the following form.

$$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi)$$

For the system with the undamped natural frequency ω_n = 2250 rad/s and the damping ratio ζ = 0.290, determine A in mm and ϕ in radian when the initial displacement x_0 is 4.80 mm and the initial velocity v_0 is −7500 mm/s.

4.[4점] 그림과 같이 탄성 축 2개와 강체 원판으로 이루어져 회전 진동을 하는 1자유도 비감쇠계가 있다. 두 축의 재질과 형상은 서로 같고, 축의 길이는 각각 L이다.

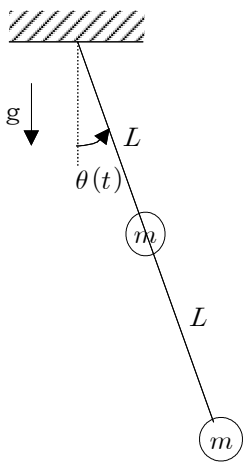


(a) 주어진 기호들만 사용하여, 이 계의 변형에너지 U와 운동에너지 T를 표현하라.

(b) 주어진 기호들만 사용하여, 고유진동수 ω_n을 표현하라.

5.[4점] 스프링과 집중질량체로 이루어진 1자유도 비감쇠계가 정지상태에 있다가 초기변위 2.5 mm와 초기속도 100 mm/s에 의해 자유진동을 할 때 변위 진폭이 10 mm로 관찰되었다면 고유진동수는 몇 rad/s인가?

6.[4점] 다음 그림과 같이, 길이가 $2L$이고 질량을 무시할 수 있는 강체 막대의 한쪽 끝과 중앙에, 각각의 질량이 m인 집중질량 두 개가 고정되어 있다. 막대의 다른 쪽 끝이 천정에 달려서 단진자 운동을 한다. 회전각 θ가 상당히 작을 때, 단진자(pendulum)의 운동방정식을 뉴튼 법칙을 사용하여 구하라. (힌트 : $\Sigma M_O = J\ddot{\theta}$)



기 계 진 동 학　　2012년 시험1 (가반) 해 답

1. 기계진동학(mechanical vibration) 과목 명칭에서 '기계'는 machine이 아니라, 통상 '기계적'이라고도 일컬어지는 '역학적(mechanical)'의 의미이다. '진동학(vibration)'이라고 하면 역학적이 아닌 진동, 가령 전자기적 진동 등도 포함되어야 하므로, 역학적 진동이라는 의미를 분명히 하기 위하여 '기계진동학'이라 한다.

2. (a) O　$T = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{\omega_d} = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$ 이므로, $0<\zeta<1$ 범위에서 ζ가 클수록 T가 큼.

(b) X　$A_1 = a_1 + a_2$, $A_2 = j(a_1 - a_2)$ 이므로, a_1과 a_2는 켤레 복소수임.

(c) O　Torque = $k_t\,\theta$ 이므로, k_t의 단위는 (torque 단위)/(각도 단위)

3. (a) m = 9.50 kg, c = 320 N/(m/s), k = 9800 N/m

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19800 \text{ N/m}}{9.50 \text{ kg}}} = 45.65 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m\,k}} = \frac{320 \text{ kg/s}}{2\sqrt{(9.50 \text{ kg})(19800 \text{ N/m})}} = 0.369$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.369^2}\ (45.65 \text{ rad/s}) = 42.43 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega_d} = \frac{2\pi \text{ rad}}{42.43 \text{ rad/s}} = 0.1481 \text{ s}$$

(b,c) ω_n = 1900 rad/s, ζ = 0.250, x_0 = 8.50 mm, v_0 = -6200 mm/s.

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.250^2}\ (1900 \text{ rad/s}) = 1839.7 \text{ rad/s}$$

$\zeta\,\omega_n = (0.250)(1900 \text{ rad/s}) = 475 \text{ rad/s}$

$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi)$, $\dot{x}(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ [-\zeta\,\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)]$

$x(0) = A\ \sin\phi = x_0 = 8.50 \text{ mm} > 0$ … ①

$\dot{x}(0) = A\ (-\zeta\,\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi) = v_0$

$$\Rightarrow \quad A\ \cos\phi = \frac{\zeta\omega_n x_0 + v_0}{\omega_d} = \frac{(475 \text{ rad/s})(8.50 \text{ mm}) - (6200 \text{ mm/s})}{1839.7 \text{ rad/s}}$$

$$= -1.175 \text{ mm} < 0 \quad \cdots ②$$

$①^2 + ②^2 \Rightarrow A = \sqrt{(8.50\,\text{mm})^2 + (-1.175\,\text{mm})^2} = 8.58 \text{ mm}$

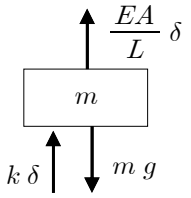
$① \div ② \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\dfrac{8.50}{-1.175} = \tan^{-1}(-7.234) = -82.1° = -1.433 \text{ rad}$

$\sin\phi>0$ 이고 $\cos\phi<0$ 이므로, ϕ는 2사분면의 각도이어야 함.

$\Rightarrow \quad \phi = -1.433 \text{ rad} + \pi \text{ rad} = 1.708 \text{ rad}$

4. (a) $k_l = \dfrac{EA}{L}$

$m g - k\delta - \dfrac{EA}{L}\delta = 0$

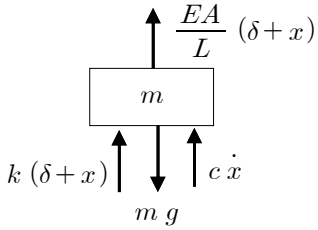


(b) $m g - k(\delta + x) - \dfrac{EA}{L}(\delta + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad [m g - k\delta - \dfrac{EA}{L}\delta] - kx - \dfrac{EA}{L}x - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \dfrac{EA}{L}x = 0$

$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + \dfrac{EA}{L})x = 0$



5. $\dfrac{p_2}{p_1} = 2$

$20 \log\dfrac{p_2}{p_0} - 20 \log\dfrac{p_1}{p_0} = 20 \log\dfrac{p_2}{p_1} = 20 \log 2 = 20(0.3010) = 6.020 \approx 6$ dB

6. (a) 운동에너지 $\quad T = \dfrac{1}{2}m v^2 = \dfrac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \dfrac{1}{2}m l^2\dot{\theta}^2$

위치에너지 $\quad U = mgl(1 - \cos\theta) + \dfrac{1}{2}k(l\theta)^2$

$\dfrac{d}{dt}(T + U) = \dfrac{d}{dt}[\dfrac{1}{2}m l^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) + \dfrac{1}{2}k l^2\theta^2] = 0$

$\Rightarrow \quad m l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl \sin\theta\ \dot{\theta} + k l^2\theta\dot{\theta} = 0, \qquad \theta \simeq 0$ 이면 $\sin\theta \simeq \theta$

$[m l(l\ddot{\theta} + g\theta) + k l^2\theta]\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad m l\ddot{\theta} + (mg + kl)\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + (\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m})\theta = 0$

(b) $J = m l^2$

$\Sigma M_O = J\ddot{\theta}$

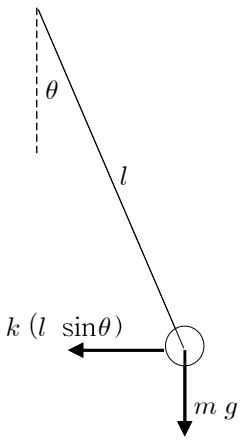
$\Rightarrow \quad -mg(l \sin\theta) - k(l \sin\theta)(l \cos\theta) = (m l^2)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad m l^2\ddot{\theta} + (mg + kl \cos\theta) l \sin\theta = 0,$

$l \neq 0, \qquad \theta \simeq 0$ 이면 $\sin\theta \simeq \theta, \quad \cos\theta \simeq 1$

$\Rightarrow \quad m l\ddot{\theta} + (mg + kl)\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + (\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m})\theta = 0$



기 계 진 동 학　　2012년 시험1 (나반) 해 답

1. 공통점은 시간에 따라 변화하는 운동을 다루는 역학(mechanics)이고, 뉴튼의 운동 제2법칙(가속도 법칙)이나 에너지 방법을 활용한다는 것이다.
   차이점은 동역학의 한 부분으로서 기계진동학은 반복 운동을 다룬다는 것이다.

2. (a) X　$A\ \sin(\omega_n t + \phi_1) = A\ (\sin\omega_n t\ \cos\phi_1 + \cos\omega_n t\ \sin\phi_1)$
   $B\ \cos(\omega_n t - \phi_2) = B\ (\cos\omega_n t\ \cos\phi_2 + \sin\omega_n t\ \sin\phi_2)$
   $A = B, \quad \cos\phi_1 = \sin\phi_2 \ \Rightarrow\ \phi_1 \neq \phi_2$

   (b) O　단순조화진동일 때, $x_{\mathrm{rms}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} A$, $x_{\mathrm{p-p}} = 2A$

   (c) X　과도감쇠운동이 좋은 경우(가령, 절삭공구 이송장치)도 있지만,
   부족감쇠운동이 좋은 경우(가령, HDD)도 있음.

3. (a) $m = 8.80$ kg, $c = 240$ N/(m/s), $k = 17500$ N/m

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{17500\ \mathrm{N/m}}{8.80\ \mathrm{kg}}} = 44.59\ \mathrm{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{240\ \mathrm{kg/s}}{2\sqrt{(8.80\ \mathrm{kg})(17500\ \mathrm{N/m})}} = 0.3058$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.3058^2}\ (44.59\ \mathrm{rad/s}) = 42.45\ \mathrm{rad/s}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi\ \mathrm{rad}} = \frac{42.45\ \mathrm{rad/s}}{2\pi\ \mathrm{rad}} = 6.76\ \mathrm{Hz}$$

(b,c) $\omega_n = 2250$ rad/s, $\zeta = 0.290$, $x_0 = 4.80$ mm, $v_0 = -7500$ mm/s.

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.290^2}\ (2250\ \mathrm{rad/s}) = 2153\ \mathrm{rad/s}$$

$$\zeta\omega_n = (0.290)\ (2250\ \mathrm{rad/s}) = 652.5\ \mathrm{rad/s}$$

$$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ \sin(\omega_d t + \phi) \qquad \dot{x}(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\ [-\zeta\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)]$$

$$x(0) = A\ \sin\phi = x_0 = 4.80\ \mathrm{mm} > 0 \quad \cdots ①$$

$$\dot{x}(0) = A\ (-\zeta\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi) = v_0$$

$$\Rightarrow \quad A\ \cos\phi = \frac{\zeta\omega_n x_0 + v_0}{\omega_d} = \frac{(652.5\ \mathrm{rad/s})(4.80\ \mathrm{mm}) + (-7500\ \mathrm{mm/s})}{2153\ \mathrm{rad/s}}$$

$$= -2.029\ \mathrm{mm} < 0 \quad \cdots ②$$

$$①^2 + ②^2 \ \Rightarrow\ A = \sqrt{(4.80\,\mathrm{mm})^2 + (-2.029\,\mathrm{mm})^2} = 5.21\ \mathrm{mm}$$

$$① \div ② \ \Rightarrow\ \phi = \tan^{-1}\frac{4.80}{-2.029} = \tan^{-1}(-2.366) = -67.1^\circ = -1.171\ \mathrm{rad}$$

$\sin\phi>0$ 이고 $\cos\phi<0$ 이므로, ϕ는 2사분면의 각도이어야 함.

$\Rightarrow \quad \phi = -1.171\ \mathrm{rad} + \pi\ \mathrm{rad} = 1.971\ \mathrm{rad}$

4. (a) 비틀림 강성 $k_t = \dfrac{GJ_p}{L}$, 질량관성모멘트 $J = \dfrac{1}{2}mR^2$

$$U = 2\left(\frac{1}{2}\, k_t\, \theta^2\right) = \frac{GJ_p}{L}\,\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2$$

(b) $$\omega_n = \sqrt{\frac{2k_t}{J}} = \sqrt{\frac{2\dfrac{GJ_p}{L}}{\dfrac{1}{2}mR^2}} = 2\sqrt{\frac{GJ_p}{mR^2L}}$$

5. $x_0 = 2.5$ mm, $v_0 = 100$ mm/s, $A = 10$ mm

$x(t) = A\,\sin(\omega_n t + \phi)$, $\dot{x}(t) = \omega_n A\,\cos(\omega_n t + \phi)$

$x(0) = A\,\sin\phi = x_0$ … ①

$\dot{x}(0) = \omega_n A\,\cos\phi = v_0$ ⇒ $A\,\cos\phi = \dfrac{v_0}{\omega_n}$ … ②

①^2+②^2 ; $A^2 = x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_n}\right)^2$

⇒ $\left(\dfrac{v_0}{\omega_n}\right)^2 = A^2 - x_0^2$ ⇒ $\omega_n = \sqrt{\dfrac{v_0^2}{A^2 - x_0^2}} = \sqrt{\dfrac{(100\,\text{mm/s})^2}{(10\,\text{mm})^2 - (2.5\,\text{mm})^2}} = 10.33$ rad/s

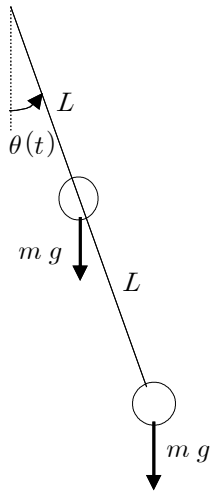
6. 질량관성모멘트 $J = mL^2 + m(2L)^2 = 5\,mL^2$

$\Sigma M_O = J\ddot{\theta}$

⇒ $-mg\,(L\,\sin\theta) - mg\,(2L\,\sin\theta) = (5\,mL^2)\,\ddot{\theta}$,

$mL \neq 0$

⇒ $5\,L\ddot{\theta} + 3\,g\,\sin\theta = 0$

$\theta \approx 0$ 이면 $\sin\theta \approx \theta$

⇒ $5\,L\ddot{\theta} + 3\,g\,\theta = 0$