기 계 진 동 학 　 2011년 학기말시험 (가반) [27점] 　 2011. 6. 14.

1.[4점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

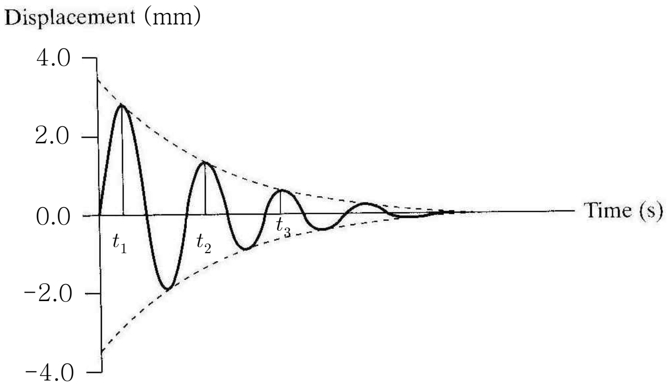
(a) 압전 소자로 구성된 진동 가속도 센서에 있어서, 크기가 작은 센서는 큰 센서에 비해 감도(sensitivity)가 나쁜 단점은 있지만, 고유진동수가 높아서 사용 가능한 진동수 범위가 넓은 장점이 있다. ( )

판단 근거 :

(b) 1자유도 감쇠계에 계단함수 가진을 하여 응답을 관찰 할 때, 감쇠비 (damping ratio)가 1보다 작은 부족감쇠계(underdamped system)에서는 감쇠비가 작을수록 오버슛(overshoot)이 커지지만 정착시간(settling time)은 짧아진다. ( )

판단 근거 :

2.[4점] 어떤 1자유도 감쇠계에서 질량이 4 kg인 질량체의 자유응답을 측정한 결과가 다음 그림과 같다. 시간 t_1(0.1초)에서 극대값이 2.5 mm이고, 시간 t_3 (0.9초)에서의 극대값이 0.5 mm이다.



(a) 이 시스템을 구성하는 감쇠기(damper)의 감쇠비(damping ratio)를 구하라.

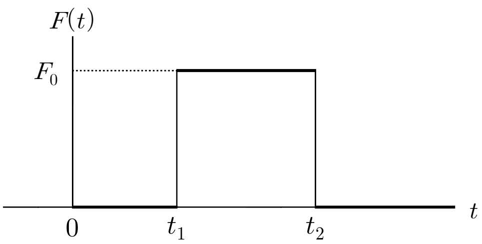
(b) 이 감쇠기(damper)의 감쇠계수는 몇 kg/s인가?

3.[4점] 정지해 있던 1자유도 감쇠계에 t_0 시점에 일정한 크기 F_0의 힘이 가해질 때 응답은

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0)-\phi]\right\}$$

이고, 여기서 $\phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ 이다.

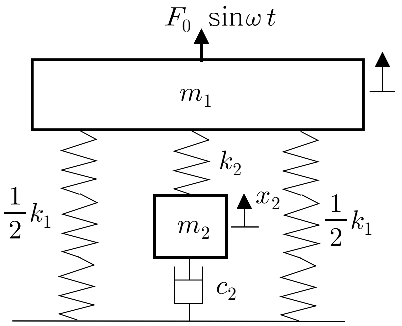
그림과 같이 t_1시점부터 t_2시점까지만 일정한 힘 F_0가 가해지는 경우에 다음 사항을 구하라.



(a) 감쇠계(ζ>0)인 경우에, t_2 시점 이후에 관찰되는 응답 변위 $x(t)$ (위의 응답 식을 사용함.)

(b) 비감쇠계(ζ=0)인 경우에, t_1시점과 t_2시점 사이에 관찰되는 응답 변위 $x(t)$ (위의 응답 식을 사용하지 않고, 적분에 의해 구함.)

4.[6점] 질량이 m_1인 테이블 판이 등가강성이 k_1인 스프링 받침 위에 놓여 있고, 회전불균형에 의해 조화 가진력 $F_0\ \sin\omega t$ 에 의해 진동한다. 테이블 판의 진동을 저감시키기 위해 질량 m_2와 강성 k_2인 스프링 및 감쇠계수 c_2인 댐퍼로 이루어진 1자유도계를 그림과 같이 테이블에 매단다. 중력은 결과에 영향을 주지 않으므로 고려하지 않는다.



(a) 두 질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 각각 그려라.

(b) $x_1(t)$와 $x_2(t)$로 표현되는 운동방정식을 뉴튼법칙에 따라 유도하라.

(c) (b)에서 구한 운동방정식을 행렬(matrix) 형태로 표현하라.

5.[4점] Calculate the response of the critically-damped system given by

$$\ddot{x} + 2\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \hat{f_0}\,\delta(t)$$

using the Laplace transform method. Assume that the initial conditions are all zero.

6.[5점] 스프링-질량으로 이루어진 1자유도 비감쇠계의 질량체가 다음과 같이 Fourier급수로 표현되는 주기적 가진력을 받는다.

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin nt \quad \text{(N)}$$

질량 m은 100 kg, 강성 k는 1000 N/m이다. 정상상태 변위 응답 $x_p(t)$를 4개 항 까지 구하라.

1.[4점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 구조물의 고유진동 특성을 파악하기 위한 실험에서 신호발생기(signal generator), 파워 증폭기, 가진기(shaker)를 사용하여 구조물을 가진시킬 때, 신호발생기에서 sine파형, 삼각파형, 사각파형, 톱니파형 등을 선택할 수 있지만, 단일 진동수의 가진을 하며 진동수를 순차적으로 변화시켜 가려면 sine파형만을 사용해야 한다. (　　)

판단 근거 :

(b) 1자유도 감쇠계에 계단함수 가진을 하여 응답을 관찰 할 때, 감쇠비(damping ratio)가 1보다 큰 과도감쇠계(overdamped system)에서는 감쇠비가 작을수록 상승시간(rising time)이 짧아지지만 오버슛(overshoot)은 커진다. (　　)

판단 근거 :

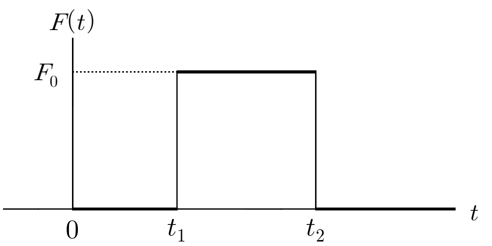
2.[4점] 질량과 감쇠를 무시할 만한 스프링에 집중질량체가 매달려 있는 1자유도 비감쇠계가 있다. 스프링 상수 k와 질량 m을 모르는데, 자유진동을 관찰하였더니 주기가 0.25초로 측정되었다. 그 질량체에 3.5 kg 질량을 추가한 후 자유진동을 관찰하였더니 주기가 0.30초로 측정되었다. k와 m 값을 각각 구하라.

3.[4점] 정지해 있던 1자유도 감쇠계에 t_0 시점에 일정한 크기 F_0의 힘이 가해질 때 응답은

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_0) - \phi]\right\}$$

이고, 여기서 $\phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ 이다.

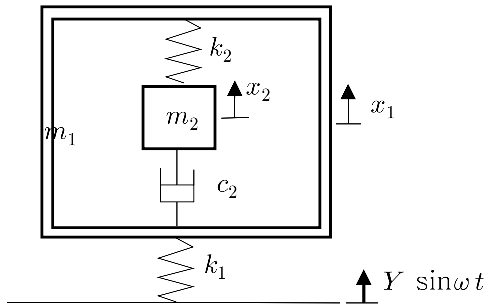
그림과 같이 t_1시점부터 t_2시점까지만 일정한 힘 F_0가 가해지는 경우에 다음 사항을 구하라.



(a) 감쇠계(ζ>0)인 경우에, 0과 t_1시점 사이에서 관찰되는 응답 변위 $x_1(t)$와 t_1시점과 t_2시점 사이에 관찰되는 응답 변위 $x_2(t)$ (위의 응답 식을 사용함.)

(b) 비감쇠계(ζ=0)인 경우에, t_2시점 이후에 관찰되는 응답 변위 $x_3(t)$ (위의 응답 식을 사용하지 않고, 적분에 의해 구함.)

4.[6점] 진동 센서를 다음 그림과 같이 모델링 할 수 있다. 질량이 m_1인 강체 케이스 안에 질량 m_2인 질량체, 강성 k_2인 스프링, 감쇠계수 c_2인 감쇠기(damper)로 이루어진 1자유도계가 매달려 있다. 진동 변위 $Y\sin\omega t$로 진동하는 바닥에 센서가 볼트로 고정되어 있는데, 탄성 볼트를 강성 k_1인 스프링으로 간주한다. 중력은 결과에 영향을 주지 않으므로 고려하지 않는다.



(a) 센서 케이스를 집중질량체로 간주하여, 두 질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 각각 그려라.

(b) $x_1(t)$와 $x_2(t)$로 표현되는 운동방정식을 뉴튼법칙에 따라 유도하라.

(c) (b)에서 구한 운동방정식을 행렬(matrix) 형태로 표현하라.

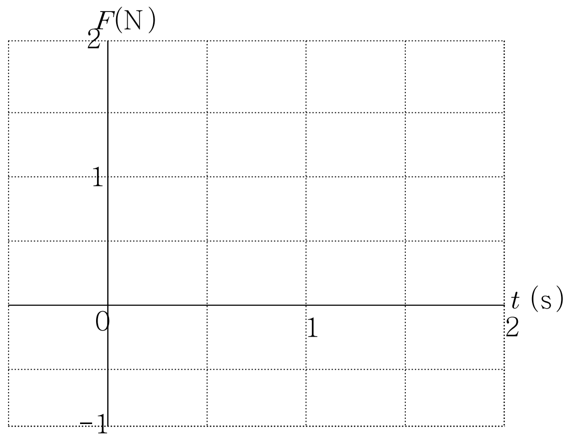
5.[5점] Calculate the response of the undamped system given by

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 e^{-at}$$

using the Laplace transform method. Assume that a>0 and that the initial conditions are all zero.

6.[4점] 다음과 같이 3개 항의 합으로 표현되는 가진력 $F(t)$를 그래프에 나타내어라.

$$F(t) = \frac{1}{2} + \cos 2\pi t + \frac{1}{9}\cos 6\pi t \quad \text{(N)}$$



기 계 진 동 학 　　　2011년 학기말시험 (가반) 　해 답

1. (a) O 　가속도 센서의 사용 가능 범위는 $r \ll 1$, 즉 $\dfrac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 이므로, ω_n이 크면 ω 범위도 커짐.

   (b) X 　$t_s \approx \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$ 이므로, ζ가 작으면 t_s가 큼.

2. (a) x_1 = 2.5 mm, x_3 = 0.5 mm

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2}\ln\frac{2.5}{0.5} = 0.8045$$

$$\Rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0.8045}{\sqrt{4\pi^2+(0.8045)^2}} = 0.127$$

   (b) $T = \dfrac{1}{2}(t_3 - t_1) = \dfrac{1}{2}$ (0.9 s - 0.1 s) = 0.4 s

$$\omega_d = \frac{2\pi\ \text{rad}}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{0.4\ \text{s}} = 15.71\ \text{rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{15.71\ \text{rad/s}}{\sqrt{1-0.127^2}} = 15.84\ \text{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\,m\,\omega_n} \quad \Rightarrow \quad c = 2\,m\,\omega_n\,\zeta = 2\ (4\ \text{kg})\ (15.84\ \text{rad/s})\ (0.127) = 16.09\ \text{kg/s}$$

3. (a) $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$$= \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1)-\phi]\right\} - \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_2)-\phi]\right\}$$

$$= \frac{F_0}{k}\left\{\frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_2)-\phi] - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1)-\phi]\right\}$$

   (b) $\zeta = 0$ 일 때, $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{m\,\omega_n}\displaystyle\int_0^t F(t-\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau$

<방법 1>

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_1}^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_{t_1}^t \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{m\,\omega_n}\left[\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\right]_{t_1}^t$$

$$= \frac{F_0}{m\,\omega_n^2}[\cos\omega_n(0) - \cos\omega_n(t-t_1)] = \frac{F_0}{k}[1-\cos\omega_n(t-t_1)]$$

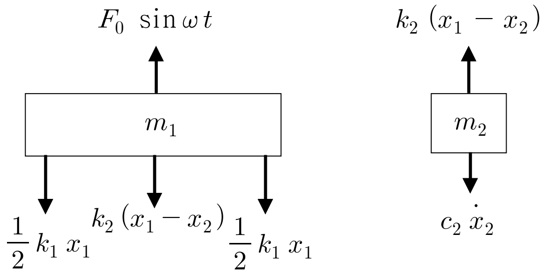
<방법 2>

$$t_1 < t-\tau < t \quad \Rightarrow \quad t_1 - t < -\tau < 0 \quad \Rightarrow \quad t - t_1 > \tau > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{m\,\omega_n}\int_0^{t-t_1} F(t-\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau = \frac{1}{m\,\omega_n}\int_0^{t-t_1} F_0\sin\omega_n\tau\,d\tau = \frac{F_0}{m\,\omega_n}\left[\frac{-1}{\omega_n}\cos\omega_n\tau\right]_0^{t-t_1}$$

$$= \frac{-F_0}{m\,\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n(0)] = \frac{F_0}{k}[1-\cos\omega_n(t-t_1)]$$

4. (a)



(b) $m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{1}{2}k_1 x_1 - \frac{1}{2}k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0 \sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\, x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin\omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - c_2 \dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

(c) $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$

5. $\ddot{x}(t) + 2\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \hat{f}_0\, \delta(t)$

변환 $\Rightarrow \quad s^2 X(s) + 2\omega_n s X(s) + \omega_n^2 X(s) = \hat{f}_0$

$$X(s) = \frac{\hat{f}_0}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\hat{f}_0}{(s + \omega_n)^2}$$

역변환 $\Rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left[\frac{\hat{f}_0}{(s + \omega_n)^2}\right] = \hat{f}_0\, L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] L^{-1}\left[\frac{1}{s + \omega_n}\right] = \hat{f}_0\, t\, e^{-\omega_n t}$

6. $m = 100$ kg, $k = 1000$ N/m, $\omega_T = 1$ rad/s, $T = 2\pi$ s

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1000\ \mathrm{N/m}}{100\ \mathrm{kg}}} = 3.162\ \mathrm{rad/s}$$

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin nt, \quad a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{n\pi}$$

$$x_0(t) = \frac{a_0}{2k} = \frac{1\ \mathrm{N}}{2(1000\ \mathrm{N/m})} = 0.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 0.5\ \mathrm{mm}$$

$$x_{cn}(t) = 0$$

$$x_{sn}(t) = X_n \sin(n\omega_T t - \theta_n)$$

$$X_n = \frac{b_n/m}{\sqrt{[\omega_n^2 - (n\omega_T)^2]^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2}} = \frac{b_n/m}{\sqrt{[\omega_n^2 - (n\omega_T)^2]^2}}$$

$$= \frac{4}{(100)n\pi}\frac{1}{\sqrt{[10 - n^2]^2}}\ (\mathrm{m}) = \frac{40 \times 10^{-3}}{\pi}\frac{1}{n|10 - n^2|}\ \mathrm{m} = \frac{40}{\pi}\frac{1}{n|10 - n^2|}\ \mathrm{mm}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n n\omega_T}{\omega_n^2 - (n\omega_T)^2} = \tan^{-1}\frac{0}{10 - n^2} = 0 \quad (n^2 < 10 \text{ 일 때, 즉 } n = 1, 2, 3 \text{ 일 때})$$

$$\pi \quad (n^2 > 10 \text{ 일 때, 즉 } n = 4, 5, 6, \cdots \text{ 일 때})$$

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{sn}(t) \quad = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \ \sin(n\omega_T t - \theta_n) \\
&= (0.5) + \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,|10-n^2|} \ \sin(n\,t - \theta_n) \qquad (\mathrm{mm}) \\
&= 0.5 + \frac{40}{\pi} \Big[\ \frac{1}{1\,|10-1^2|} \sin(t - \theta_1) + \frac{1}{2\,|10-2^2|} \sin(2\,t - \theta_2) + \frac{1}{3\,|10-3^2|} \sin(3\,t - \theta_3) \\
&\qquad + \cdots \Big] \qquad (\mathrm{mm}) \\
&= 0.5 + \frac{40}{\pi} \Big[\ \frac{1}{9} \ \sin(t) + \frac{1}{12} \ \sin(2t) + \frac{1}{3} \ \sin(3t) + \cdots \Big] \qquad (\mathrm{mm}) \\
&= 0.5 + \frac{40}{9\pi} \ \sin(t) + \frac{10}{3\pi} \ \sin(2t) + \frac{40}{3\pi} \ \sin(3t) + \cdots \qquad (\mathrm{mm}) \\
&= 0.5 + 1.41 \ \sin(t) + 1.06 \ \sin(2t) + 4.24 \ \sin(3t) + \cdots \qquad (\mathrm{mm})
\end{aligned}
$$

기 계 진 동 학 　　　　2011년 학기말시험 (나반)　 해 답

1. (a) O　　 sine파형 이외의 파형들은 Fourier급수로 표현되듯이 여러 진동수의 가진을 하게 됨.

(b) X　　 과도감쇠계에서는 overshoot이 없음.

2. $T_1 = 0.25 \text{ s}, \quad \omega_1 = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{T_1} = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{0.25 \text{ s}} = 25.13 \text{ rad/s}$

$T_2 = 0.30 \text{ s}, \quad \omega_2 = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{T_2} = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{0.30 \text{ s}} = 20.94 \text{ rad/s}, \qquad \Delta m = 3.5 \text{ kg}$

$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad k = m\,\omega_1^2 \quad \cdots ①$

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m+\Delta m}} \quad \Rightarrow \quad k = (m+\Delta m)\,\omega_2^2 \quad \cdots \quad ②$

$① = ② \quad \Rightarrow \quad m\,\omega_1^2 = (m+\Delta m)\,\omega_2^2$

$\Rightarrow \quad m = \Delta m \dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = (3.5 \text{ kg}) \dfrac{(20.94 \text{ rad/s})^2}{(25.13 \text{ rad/s})^2 - (20.94 \text{ rad/s})^2} = 7.95 \text{ kg}$

$① \Rightarrow \quad k = m\,\omega_1^2 = (7.95 \text{ kg})\,(25.13 \text{ rad/s})^2 = 5021 \text{ N/m}$

검산 : $② \Rightarrow \quad k = (m+\Delta m)\,\omega_2^2 = (7.95 \text{ kg} + 3.5 \text{ kg})\,(20.94 \text{ rad/s})^2 = 5021 \text{ N/m}$

3. (a) $x_1(t) = 0$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_d(t-t_1) - \phi]\right\}$$

(b) $\zeta = 0$ 일 때, $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t F(t-\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau$

<방법 1>

$$x_3(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n}\left[\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{F_0}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_1)]$$

$$= \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_1)] = \frac{2F_0}{k}\sin\omega_n\frac{t_2-t_1}{2}\,\sin\omega_n\left(t - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

<방법 2>

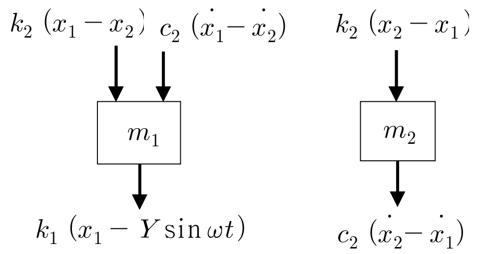
$t_1 < t-\tau < t_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 - t < -\tau < t_2 - t \quad \Rightarrow \quad t - t_1 > \tau > t - t_2$

$$x_3(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t-t_2}^{t-t_1} F(t-\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t-t_2}^{t-t_1} F_0\sin\omega_n\tau\,d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n}\left[\frac{-1}{\omega_n}\cos\omega_n\tau\right]_{t-t_2}^{t-t_1} = \frac{-F_0}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n(t-t_2)]$$

$$= \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_1)] = \frac{2F_0}{k}\sin\omega_n\frac{t_2-t_1}{2}\,\sin\omega_n\left(t - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

4. (a)



(b) $m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - Y\sin\omega t) - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + c_2 \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)\, x_1 - k_2 x_2 = k_1 Y \sin\omega t$$

$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

$$\Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

(c) $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 Y \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. $\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 e^{-at}$

$$-(\mathrm{L})\rightarrow \quad s^2 X(s) + \omega_n^2 X(s) = \frac{f_0}{s+a}$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{f_0}{(s+a)(s^2 + \omega_n^2)} = f_0\left[\frac{A}{(s+a)} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$A\left[s^2 + \omega_n^2\right] + (Bs + C)(s + a) = 1$$

$$A + B = 0, \qquad aB + C = 0, \qquad \omega_n^2 A + aC = 1$$

$$\rightarrow \quad B = -A, \quad C = -aB = aA, \quad \omega_n^2 A + a(aA) = 1$$

$$A = \frac{1}{\omega_n^2 + a^2}, \quad B = -A = \frac{-1}{\omega_n^2 + a^2}, \quad C = aA = \frac{a}{\omega_n^2 + a^2}$$

$$X(s) = \frac{f_0}{\omega_n^2 + a^2}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{s-a}{s^2 + \omega_n^2}\right) = \frac{f_0}{\omega_n^2 + a^2}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{s}{s + \omega_n^2} + \frac{a}{\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}\right)$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{f_0}{\omega_n^2 + a^2}\left(e^{-at} - \cos\omega_n t + \frac{a}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

6.