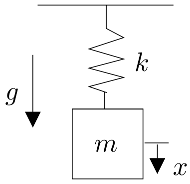
기 계 진 동 학　　2011년 시험1 (가반) [26점]　　2011. 4. 5.

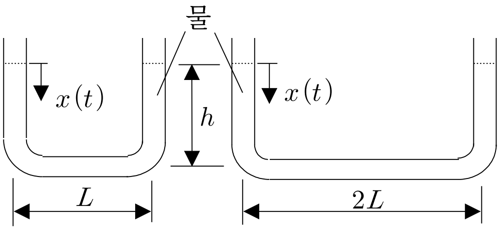
1.[2점] 아래 그림과 같이 스프링과 질량체로 구성된 1자유도계를 대상으로, 역학적 진동(mechanical vibration)이란 무엇인지를 서술하라.



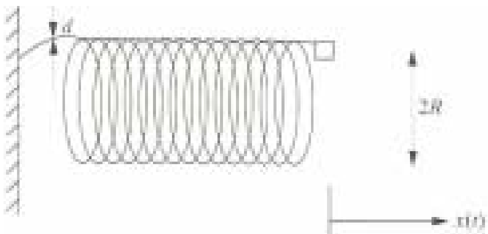
2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 초기 가진에 의해 자유진동 하는 1자유도계에서, 질량과 스프링 상수 값이 일정할 때 감쇠계수 값이 클수록 진동 주기가 길어진다. (　　)

(b) 다음 그림과 같이 길이가 다르지만 높이가 같은 두 가지 액주계(U-tube manometer)에 담겨있는 물의 고유진동수는 서로 같다. (　　)



(c) 헬리컬 스프링에 질량 m인 질량체를 결합할 때 결정되는 고유진동수를 10% 증가시키기 위하여 스프링 재료의 굵기 d를 5% 정도 증가시킨다. (　　)



3.[6점] Consider a 1-DOF (degree-of-freedom) spring-mass-damper system.

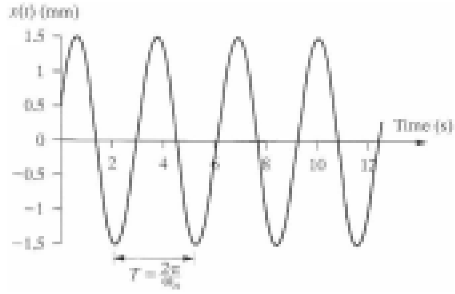
(a) The system has a mass of 9.8 kg, damping coefficient of 240 N/(m/s), and stiffness of 8930 N/m. Calculate the damped natural frequency f_d in Hz.

(b,c) The free response has the following form.

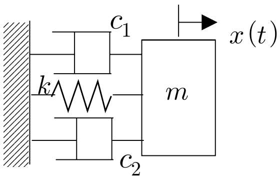
$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\, \sin(\omega_d t + \phi)$$

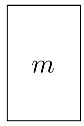
For the system with the undamped natural frequency ω_n = 430 rad/s and the damping ratio ζ = 0.280, determine A in mm and ϕ in radian when the initial displacement x_0 is -4.5 mm and the initial velocity v_0 is -1500 mm/s.

4.[3점] 진동 변위를 관찰한 결과가 다음 그래프와 같을 때, 적분 계산을 하여 root-mean-square 진폭 x_{rms}를 구하라. $x(t)$ = (1.5 mm) $\sin(2t + \phi)$

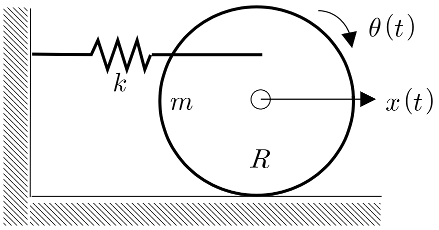


5.[3점] 그림과 같이, 스프링 1개(강성 k)와 감쇠기(damper) 2개(감쇠계수 c_1, c_2)가 나란히 설치된 충격흡수기(shock absorber)가 질량체(질량 m)와 결합되어 있다. 질량체의 자유물체도(free-body diagram)를 그리고, 감쇠기 2개를 하나의 등가 감쇠기로 표현하는 등가감쇠계수 c_{eq}를 뉴튼법칙에 따라 유도하라.





6.[6점] 다음 그림에 보인 1자유도계의 운동방정식을 에너지방법으로 유도하고, 계의 고유진동수를 제시하라. 여기서, 원판은 균일한 강체로서 질량이 m이고 반지름이 R이며 (관성모멘트는 $\frac{1}{2}mR^2$), 미끄럼 없이 구른다 ($x = R\theta$). 강성이 k인 스프링의 한쪽 끝은 벽에 고정되어 있고, 다른 쪽 끝은 원판의 중심에서 수직 위로 $\frac{R}{2}$인 지점에 결합되어 있다.



기 계 진 동 학　　2011년 시험1 (나반) [26점]　　2011. 4. 5.

1.[2점] 기계진동학 과목의 선수과목으로 고체역학, 동역학, 공학수학 과목들이 지정되어 있다. 선수과목들이 기계진동학 과목에 관련되는 사항을 각각 한 문장으로 서술하라.

고체역학 :

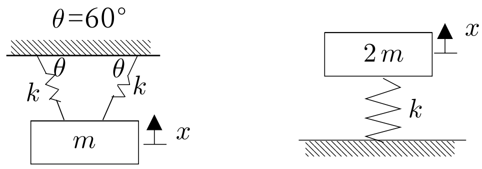
동역학 :

공학수학 :

2.[6점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 비행기 날개에 달려 있는 엔진과 연료통을 하나의 질량체로 간주하고, 날개를 동체 벽에 고정된 외팔보(cantilever)로 간주할 때, 비행기 운항 중 연료가 소모됨에 따라 날개의 고유진동수는 증가한다.　(　)

(b) 다음과 같은 두 가지 1자유도계의 고유진동수는 서로 같다.　(　)



(c) 줄에 매달린 질량체가 단진자 운동을 할 때, 줄의 길이가 일정하면 각도 진폭이 커져도 왕복운동 주기는 변함없이 일정하다.　(　)

3.[6점] Consider a 1-DOF (degree-of-freedom) spring-mass-damper system.

(a) The system has a mass of 5.4 kg, damping coefficient of 186 N/(m/s), and stiffness of 9650 N/m. Calculate the oscillating period T in s for the underdamped system.

(b,c) The free response has the following form.

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\, \cos(\omega_d t + \phi)$$

For the system with the undamped natural frequency ω_n = 1890 rad/s and the damping ratio ζ = 0.225, determine A in mm and ϕ in radian when the initial displacement x_0 is -2.80 mm and the initial velocity v_0 is 4300 mm/s.

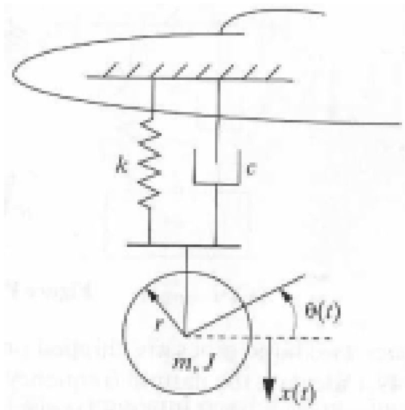
4.[3점] 1자유도 비감쇠계의 자유진동 해석을 한 결과 다음 식으로 응답이 구해졌다.

$$x(t) = 0.5\ \sin(\pi t + \frac{\pi}{4}) \quad \text{mm}$$

초기변위 x_0와 초기속도 v_0를 구하고, 시간 t에 따른 응답의 변위 $x(t)$를 두 주기 이상 스케치 하라.

5.[3점] 이어폰 사용에 따른 청소년 난청 유발이 심각하여 개인 음향기기의 최대 볼륨 크기를 제한하는 방안이 검토 중이다. 프랑스는 MP3 플레이어의 최대 허용 볼륨을 100dB에서 85dB로 낮출 계획이다. 이와 같이 15dB 낮추면 음압(Pa)은 100dB일 때에 비해서 몇 %로 되겠는가?

6.[6점] 비행기 착륙(landing) 시스템을 다음 그림과 같이 단순화 시킨 1자유도계에서, 감쇠 c를 무시하고 운동방정식을 에너지방법으로 유도하고, 계의 고유진동수를 제시하라. 여기서, 바퀴의 질량은 m이고 질량 관성모멘트는 J이다. 바퀴의 병진운동 변위 x와 회전운동 각도 θ에 $x = r\theta$ 관계가 있다고 가정한다.



기 계 진 동 학 2011년 시험1 (가반) 해 답

1. (서술)

예: 역학적 진동이란 역학적 에너지 간의 반복적인 에너지 변환에 따른 운동이다.
질량체(m)의 중력 g방향 위치 에너지와 스프링(상수 k)의 변형에너지를 합한 위치에너지와 질량체(m)의 운동에너지 간의 반복적인 에너지 변환에 따른 운동이다.

2. (a) O $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$

(b) X $\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$ 이므로, 왼쪽 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2g}{L+2h}}$, 오른쪽 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2g}{2L+2h}}$

(c) O $\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{Gd^4}{64nR^3m}} = \sqrt{\dfrac{G}{64nR^3m}}\,d^2$

$$\frac{d_2^2}{\omega_2} = \frac{d_1^2}{\omega_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} = \sqrt{1.10} = 1.049 \approx 1.05 \quad \Rightarrow \quad 5\%$$

3. (a) m = 9.8 kg, c = 240 N/(m/s), k = 8930 N/m

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8930\ \mathrm{N/m}}{9.8\ \mathrm{kg}}} = 30.19\ \mathrm{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{240\ \mathrm{kg/s}}{2\sqrt{(9.8\ \mathrm{kg})(8930\ \mathrm{N/m})}} = 0.4056$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.4056^2}\ (30.19\ \mathrm{rad/s}) = 27.59\ \mathrm{rad/s}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi\ \mathrm{rad}} = \frac{27.59\ \mathrm{rad/s}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = 4.39\ \mathrm{Hz}$$

(b,c) ω_n = 430 rad/s, ζ = 0.280, x_0 = -4.5 mm, v_0 = -1500 mm/s.

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.280^2}\ (430\ \mathrm{rad/s}) = 412.8\ \mathrm{rad/s}$$

$$x(t) = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\,\sin(\omega_d t + \phi) \qquad \dot{x}(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\,[-\zeta\omega_n\ \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d\ \cos(\omega_d t + \phi)]$$

$$x(0) = A\sin\phi = x_0 = -4.5\ \mathrm{mm} < 0 \quad \cdots ①$$

$$\dot{x}(0) = A\,(-\zeta\omega_n\ \sin\phi + \omega_d\ \cos\phi) = v_0$$

$$\Rightarrow \quad A\cos\phi = \frac{\zeta\omega_n x_0 + v_0}{\omega_d} = \frac{(0.280)(430\ \mathrm{rad/s})(4.5\ \mathrm{mm}) + (-1500\ \mathrm{mm/s})}{412.8\ \mathrm{rad/s}}$$

$$= -4.946\ \mathrm{mm} < 0 \quad \cdots ②$$

$$①^2 + ②^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{(-4.5\,\mathrm{mm})^2 + (-4.946\,\mathrm{mm})^2} = 6.69\ \mathrm{mm}$$

$$① \div ② \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\frac{-4.5}{-4.946} = \tan^{-1}(0.910) = 42.3° = 0.738\ \mathrm{rad}$$

$\sin\phi<0$ 이고 $\cos\phi<0$ 이므로, ϕ는 3사분면의 각도이어야 함.

$\Rightarrow \quad \phi = 0.738\ \mathrm{rad} + \pi\ \mathrm{rad} = 3.88\ \mathrm{rad}$

4. $\omega_n = 2$ rad/s, $\quad T = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{2 \text{ rad/s}} = \pi$ s

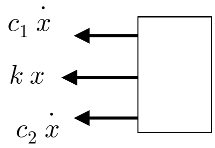
$$\int_0^T [1.5 \sin(2t+\phi)]^2\, dt = (1.5)^2 \int_0^\pi \frac{1-\cos 2(2t+\phi)}{2}\, dt = (1.5)^2 \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{4}\sin 2(2t+\phi)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{(1.5)^2\, \pi}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T [1.5 \sin(2t+\phi)]^2\, dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{(1.5)^2\,\pi}{2} = \frac{(1.5)^2}{2}$$

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [1.5 \sin(2t+\phi)]^2\, dt} = \sqrt{\frac{(1.5)^2}{2}} = \frac{1.5}{\sqrt{2}} \text{ (mm)} = 1.06 \text{ mm}$$

5.



$$m\,\ddot{x} = -c_1\,\dot{x} - k\,x - c_2\,\dot{x} \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{x} + (c_1 + c_2)\,\dot{x} + k\,x = 0$$

$$c_{eq} = c_1 + c_2$$

6. $$T = \frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\,(R\,\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k\,(x_1)^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{3R}{2}\theta\right)^2 = \frac{9}{8}\, k\, R^2\, \theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{9}{8} k\, R^2\, \theta^2\right) = \frac{3}{2} m\, R^2\, \dot{\theta}\, \ddot{\theta} + \frac{9}{4} k\, R^2\, \theta\, \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\, m\, \ddot{\theta} + 3\, k\, \theta = 0, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

기 계 진 동 학　　　2011년 시험1 (나반)　해 답

1. (설명) 예:
   고체역학 : 힘과 변형의 관계가 강성(stiffness)을 나타내므로 진동 요소와 관련된다.
   동역학 : 진동해석을 위한 모델링 방법에 뉴튼 법칙, 일과 에너지 방법 등이 있다.
   공학수학 : 진동해석 중 모델링 한 결과인 미분방정식의 해를 구하는 수학이 필요하다.

2. (a) O　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{3EI}{m\,l^3}}$　$\Rightarrow$　연료 감소에 따라 질량 m이 감소하면 ω_n이 증가함.

   (b) X　왼쪽　$90° - 60° = 30°$, $k_{eq} = 2\ k\ \cos^2 30° = 2\ k\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}k$,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}k}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \qquad \text{오른쪽} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

   (c) X　$\theta \approx 0$ 이 아니면 운동방정식은 $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$ 이므로, ω_n 값은 θ에 따라 다르다.

3. (a) m = 5.4 kg, c = 186 N/(m/s), k = 9650 N/m

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9650\ \mathrm{N/m}}{5.4\ \mathrm{kg}}} = 42.27\ \mathrm{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{186\ \mathrm{kg/s}}{2\sqrt{(5.4\ \mathrm{kg})(9650\ \mathrm{N/m})}} = 0.407$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.407^2}\ (42.27\ \mathrm{rad/s}) = 38.60\ \mathrm{rad/s}$$

$$T = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{\omega_d} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{38.60\ \mathrm{rad/s}} = 0.1628\ \mathrm{s}$$

   (b,c) ω_n = 1890 rad/s, ζ = 0.225, x_0 = -2.80 mm, v_0 = 4300 mm/s.

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.225^2}\ (1890\ \mathrm{rad/s}) = 1841.5\ \mathrm{rad/s}$$

$$x(t) = A\ e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\left[-\zeta\omega_n \cos(\omega_d t + \phi) - \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)\right]$$

$$x(0) = A\cos\phi = x_0 = -2.80\ \mathrm{mm} < 0 \quad \cdots ①$$

$$\dot{x}(0) = A\,(-\zeta\omega_n\cos\phi - \omega_d\sin\phi) = v_0$$

$$\Rightarrow \quad A\sin\phi = \frac{-\zeta\omega_n x_0 - v_0}{\omega_d} = \frac{-(0.225)(1890\ \mathrm{rad/s})(-2.80\ \mathrm{mm}) - (4300\ \mathrm{mm/s})}{1841.5\ \mathrm{rad/s}}$$

$$= -1.688\ \mathrm{mm} < 0 \quad \cdots ②$$

$$①^2 + ②^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{(-2.80\ \mathrm{mm})^2 + (-1.688\ \mathrm{mm})^2} = 3.27\ \mathrm{mm}$$

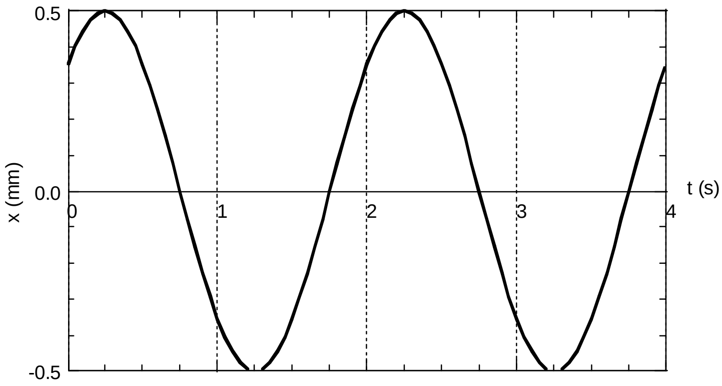
$$① \div ② \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\frac{-1.688}{-2.80} = \tan^{-1}(0.6029) = 31.08° = 0.543\ \mathrm{rad}$$

   $\sin\phi<0$ 이고 $\cos\phi<0$ 이므로, ϕ는 3사분면의 각도이어야 함.
   $\Rightarrow$　ϕ = 0.543 rad + π rad = 3.68 rad

4. $x_0 = x(0) = (0.5\ \text{mm})\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{mm} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{mm} = 0.354\ \text{mm}$

$v_0 = \dot{x}(0) = (0.5\ \text{mm})\ (\pi\ \text{rad/s})\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{mm/s} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ \text{mm/s} = 1.111\ \text{mm/s}$

스케치 : $t = 0$ 일 때, $x(0)$ 지점, $\dot{x}(0)$ 기울기. 주기 $T = \dfrac{2\pi\,\text{rad}}{\pi\,\text{rad/s}} = 2\ s$



5. $20\ \log\frac{p_1}{p_0} = 100\ \text{dB}$ ⋯ ① $20\ \log\frac{p_2}{p_0} = 85\ \text{dB}$ ⋯ ②

② - ① ; $20\ \log\frac{p_2}{p_0} - 20\ \log\frac{p_1}{p_0} = 85 - 100\ \text{dB} = -15\ \text{dB}$

$\Rightarrow\ \log\frac{p_2}{p_0} - \log\frac{p_1}{p_0} = -\frac{15}{20} \quad\Rightarrow\quad \log\frac{p_2}{p_1} = -0.75$

$\Rightarrow\ \frac{p_2}{p_1} = 10^{-0.75} = 0.1778 \approx 17.8\ \%$

6. <해답 1>

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\,x^2\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}\,\ddot{x} + k\,x\,\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} + k\,x = 0\ , \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{J}{r^2}}} = \sqrt{\frac{k\,r^2}{m\,r^2 + J}}$$

<해답 2>

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\,(r\,\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m\,r^2 + J)\,\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,(r\,\theta)^2 = \frac{1}{2}k\,r^2\,\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m\,r^2 + J)\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\,r^2\,\theta^2\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad (m\,r^2 + J)\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + k\,r^2\,\theta\,\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow\quad (m\,r^2 + J)\,\ddot{\theta} + k\,r^2\,\theta = 0\ , \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k\,r^2}{m\,r^2 + J}}$$