기 계 진 동 학　　2010년 시험2 (가반) [26점]　　2010. 5. 6.

1.[4점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 어느 사찰의 범종을 타격하니 125.3 Hz의 진동과 125.4 Hz의 진동이 동시에 발생하여 소리의 맥놀이 현상이 나타났다. 다른 사찰의 범종을 타격하니 103.7 Hz의 진동과 103.8 Hz의 진동이 동시에 발생하여 맥놀이 현상이 나타났다. 두 범종의 맥놀이 주기는 같다. ( )

판단 근거 :

(b) 전기 모터의 회전수가 증가할수록 진동 변위의 크기, 즉 진폭이 커진다. ( )

판단 근거 :

2.[4점] 감쇠를 무시할 수 있는 1자유도계에서 조화가진 진동의 운동방정식을 표준형태로 나타내면 다음과 같다. $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \sin\omega t$

이 미분방정식의 제차해(homogeneous solution)는 다음과 같다. $x_h(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$

구동진동수 ω가 고유진동수 ω_n과 일치할 때, 공진(resonance)이 발생한다. 이 때의 강제진동 응답, 즉 특수해(particular solution) $x_p(t)$를 유도하여 구하라.

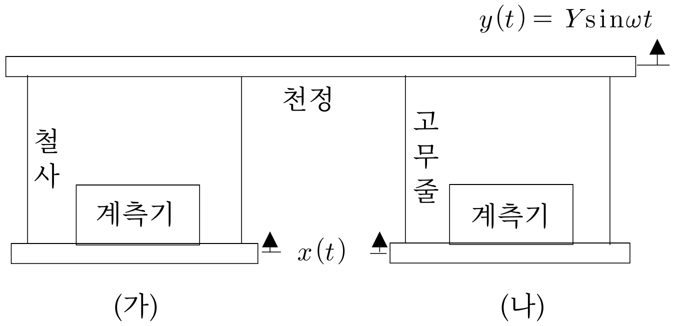
3.[6점] The response of an underdamped 1-DOF system excited by a harmonic cosine force is

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) + X\cos(\omega t - \theta)$$

(a) For the system of mass m = 8 kg, spring stiffness k = 65,000 N/m, damping coefficient c = 550 kg/s, calculate the steady state amplitude X and phase θ if the harmonic force is 720 N at 11 Hz.

(b) For the system of damping ratio ζ = 0.3, undamped natural frequency ω_n = 40 rad/s, driving frequency ω = 25 rad/s, steady-state amplitude X = 10 mm, and phase θ = 0.55 rad, calculate the amplitude A and phase ϕ of the response if the system was initially at rest.

4.[6점] 외부 진동의 영향에 민감한 정밀 계측기를 설치함에 있어서, 진동 차단을 위하여 천정에 매단 받침에 올려놓으면서, (가) 철사 4개로 매다는 방안과 (나) 고무줄 4개로 매다는 방안을 구상하였다. 철사의 강성 k_1은 매우 크고 고무줄의 강성 k_2는 매우 작다. 철사의 감쇠계수는 c_1, 고무줄의 감쇠계수는 c_2이다.



(a) 계측기와 받침의 결합체를 하나의 집중질량 m으로 간주하고, (나)의 경우에 대하여 결합체의 자유물체도(free-body diagram)를 도시하라. (중력 표시 불필요)

(b) 계측기 받침의 변위 진폭 X와 천정의 변위 진폭 Y의 비 X/Y를 감쇠비 ζ 및 진동수 비 r(= 구동진동수ω/고유진동수ω_n)의 식으로 표현하고(유도 불필요), 감쇠비 ζ가 0.5인 경우에 진동수 비 r의 함수로 X/Y의 그래프를 도시하라.

(c) (가)와 (나) 중에서 진동 차단에 유리한 방안을 선택하고 그 이유를 설명하라.

5.[6점] 드럼 세탁기를 개발하는 단계에서 세탁물 없이 가동시켜 보니, 편심 회전으로 인하여 수직방향 진동이 발생하였다. 편심체의 질량 m_0가 한 곳에 집중된 것으로 간주하여 회전 중심으로부터 편심체까지의 거리가 e라고 할 때, 세탁기 가동 중 바닥으로 전달되는 힘의 크기 F_T를 무차원화 하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{F_T}{m_0\, e\, \omega_r^2} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

이는 힘 전달률이라고 불리며, 여기서 진동수 비 r은 회전진동수 ω_r과 고유진동수 ω_n의 비이고, 감쇠비 ζ는 감쇠계수와 임계감쇠계수의 비이다.

(a) 감쇠비 ζ가 0인 경우와 0.5인 경우에 대하여, 힘 전달률 $F_T/m_0 e\omega_r^2$를 진동수 비 r의 함수로 하여 그래프를 작성하라.

(b) 세탁기 가동 중 바닥으로 전달되는 힘의 전달률 $F_T/m_0 e\omega_r^2$가 0.2 이하가 되도록 세탁기를 설계하고자 한다. 300 rpm과 1200 rpm으로 사용될 세탁기의 감쇠를 무시할 만큼 작게 할 때, 고유진동수 ω_n은 어느 범위의 값이어야 하는가?

(c) 드럼 세탁기나 공작기계와 같이 회전하는 장치에서 바닥으로 전달되는 진동을 예측하는 것은 무엇 때문인지 두 문장으로 서술하라.

1.[4점] 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( ) 안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 1940년에 미국 Tacoma Narrows Bridge가 공진(resonance)에 의해 붕괴되었다. 가진력은 풍속이 주기적으로 변동하는 바람에 의해 가해졌는데, 풍속 변동 주기의 역수인 진동수가 다리 상판의 고유진동수와 같았기 때문에 공진이 발생하였다. ( )

판단 근거 :

(b) 440 Hz 소리굽쇠가 진동하여 내는 소리와 멜로디온 라(La)음을 동시에 발생시켰더니 2초 주기의 맥놀이(beat)현상이 나타났다. 동일한 소리굽쇠 소리와 기타 라(La)음을 동시에 발생시켰더니 2초 주기의 맥놀이 현상이 나타났다. 이 두 악기의 라(La)음을 동시에 발생시키면 맥놀이 현상이 나타나지 않는다.( )

판단 근거 :

2.[4점] 감쇠를 무시할 수 있는 1자유도계에서 조화가진 진동의 운동방정식을 표준형태로 나타내면 다음과 같다. $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \sin\omega t$

이 미분방정식의 제차해(homogeneous solution)는 다음과 같다. $x_h(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$

구동진동수 ω가 고유진동수 ω_n과 같지 않을 때, 강제진동 응답, 즉 특수해(particular solution) $x_p(t)$를 유도하여 구하라.

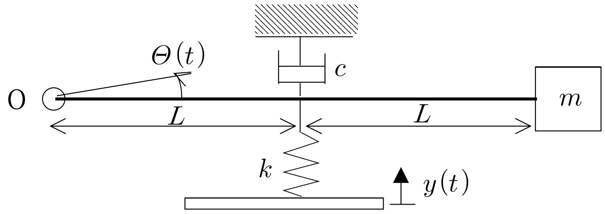
3.[6점] The response of an underdamped 1-DOF system excited by a harmonic cosine force is

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) + X\cos(\omega t - \theta)$$

(a) For the system of mass m = 9 kg, spring stiffness k = 68,000 N/m, damping coefficient c = 570 kg/s, calculate the steady state amplitude X and phase θ if the harmonic force is 810 N at 10 Hz.

(b) For the system of damping ratio ζ = 0.3, undamped natural frequency ω_n = 40 rad/s, driving frequency ω = 20 rad/s, steady-state amplitude X = 12 mm, and phase θ = 0.383 rad, calculate the amplitude A and phase ϕ of the response if the system was initially at rest.

4.[6점] 그림과 같이 도시되는 피아노 페달이 있다. 길이 $2L$인 강체 막대의 질량은 무시되고, 질량체 m의 부피는 무시된다. 감쇠기는 고정부에 연결되어 있고, 스프링이 연결된 바닥의 작은 진동 $y(t)$로 인해 페달이 진동한다. $y(t) = Y \sin\omega t$



(a) 힌지(hinge) O의 반력(reaction)을 제외하고, 막대와 질량의 결합체에 가해지는 힘들을 나타내는 자유물체도(free-body diagram)를 도시하라. (중력 표시 불필요)

(b) 막대의 회전 진동 각 변위를 $\Theta(t)$라고 할 때, 운동방정식을 유도하라.

(c) k = 2000 N/m, c = 25 kg/s, m = 30 kg이고, 거리 L은 0.05 m 이며, 응답 $\Theta(t)$는 다음과 같다.

$\Theta(t)$ = (0.06 rad) sin(20t-2.14)

감쇠기(damper)를 통해 윗면 고정부에 전달되는 힘의 크기는 몇 N인가?

5.[6점] 고속 프레스 위의 크랭크 축 회전을 편심체에 의한 회전 불균형 문제로 간주하여 수직방향 1자유도 감쇠계로 다룬다. 프레스 본체 전부의 질량이 m이고, 편심체는 질량이 m_0이며 회전중심으로부터 편심체까지의 거리가 e일 때, 본체의 진동 진폭 X_r을 무차원화 하면 다음과 같다.

$$\frac{m X_r}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

여기서 r은 진동수 비(=회전진동수/고유진동수), ζ는 감쇠비(=감쇠계수/임계감쇠계수)이다.

(a) 감쇠비 ζ가 0.25인 경우와 1인 경우에 대하여, 무차원 변위 진폭 $m X_r/m_0 e$를 진동수 비 r의 함수로 하여 그래프를 작성하라.

(b) 고속 프레스의 고유진동수가 13 Hz라면, 위험속도는 몇 rpm인가?

(c) 생산량을 최대로 하기 위하여 회전수를 가급적 크게 하여 가동하려고 한다. 단가를 높이지 않으면서 진동을 작게 하기 위하여, 프레스 설계단계에서 질량 m, 강성 k, 감쇠계수 c의 값을 어떤 방향으로 결정하는 게 바람직한가?

기 계 진 동 학 　　　　2010년 시험2 (가반) 해 답

1. (a) O ($T_b = \dfrac{1}{|f_n - f|}$, $|125.4 - 125.3| = 0.1$ Hz, $|103.8 - 103.7| = 0.1$ Hz)

   (b) X (진동수 비 $r > 1$ 일 때, $r(=\omega_r/\omega_n)$이 증가할 수록 진폭 X_r은 감소한다.

2. $\ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = f_0 \sin\omega t$

$x_p(t) = A_0\, t \cos\omega t + B_0\, t \sin\omega t$

$\dot{x}_p = A_0 (\cos\omega t - \omega t \sin\omega t) + B_0 (\sin\omega t + \omega t \cos\omega t)$

$\ddot{x}_p = A_0 (-2\omega \sin\omega t - \omega^2 t \cos\omega t) + B_0 (2\omega \cos\omega t - \omega^2 t \sin\omega t)$

$[\, A_0 (-2\omega \sin\omega t - \omega^2 t \cos\omega t) + B_0 (2\omega \cos\omega t - \omega^2 t \sin\omega t)\,]$
$+ \omega^2 [A_0\, t \cos\omega t + B_0\, t \sin\omega t] = f_0 \sin\omega t$

$A_0 (-2\omega \sin\omega t) + B_0 (2\omega \cos\omega t) = f_0 \sin\omega t$

$\Rightarrow \quad A_0 = -\dfrac{f_0}{2\omega},\quad B_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = -\dfrac{f_0}{2\omega} t \cos\omega t$

3. (a) $m = 8$ kg, $k = 65{,}000$ N/m, $c = 550$ kg/s, $F_0 = 720$ N, $f = 11$ Hz

$\omega = (2\pi \text{ rad})(11 \text{ Hz}) = 69.1$ rad/s

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{65{,}000 \text{ N/m}}{8 \text{ kg}}} = 90.1$ rad/s, $\quad \zeta = \dfrac{550 \text{ kg/s}}{2\sqrt{(8 \text{ kg})(65{,}000 \text{ N/m})}} = 0.381$

$\omega_d = \sqrt{1-(0.381)^2}\,(90.1 \text{ rad/s}) = 83.3$ rad/s

$\zeta\omega_n = (0.381)(90.1 \text{ rad/s}) = 34.3$ rad/s

$f_0 = \dfrac{720 \text{ N}}{8 \text{ kg}} = 90 \text{ m/s}^2$

$X = \dfrac{90}{\sqrt{(90.1^2 - 69.1^2)^2 + [2(0.381)(90.1)(69.1)]^2}} = 0.01551 \text{ (m)} = 15.51$ mm

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{2(0.381)(90.1)(69.1)}{90.1^2 - 69.1^2} = \tan^{-1}(1.419) = 0.957$ rad (= 54.8°)

(b) $\zeta = 0.3$, $\omega_n = 40$ rad/s, $\omega = 25$ rad/s, $X = 0.01$ m, $\theta = 0.55$ rad

$\omega_d = \sqrt{1-(0.3)^2}\,(40 \text{ rad/s}) = 38.1$ rad/s

$\zeta\omega_n = (0.3)(40 \text{ rad/s}) = 12$ rad/s

$x(t) = A\, e^{-12t} \sin(38.1\, t + \phi) + (0.01 \text{ m}) \cos(25\, t - 0.55)$

$\dot{x}(t) = -12\, A\, e^{-12t} \sin(38.1\, t + \phi) + 38.1\, A\, e^{-12t} \cos(38.1\, t + \phi)$
$- (0.25 \text{ m/s}) \sin(25\, t - 0.55)$

$x(0) = A \sin\phi + (0.01 \text{ m}) \cos(-0.55) = 0$

$\Rightarrow \quad A \sin\phi = -0.00852 \text{ m} < 0 \qquad \cdots$ ①

$\dot{x}(0) = -12\, A \sin\phi + 38.1\, A \cos\phi - (0.25 \text{ m/s}) \sin(-0.55) = 0$

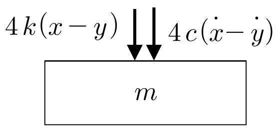
$\Rightarrow \quad A \cos\phi = [(12)(-0.00852) - 0.131]/38.1 = -0.00611 \text{ (m)} < 0 \qquad \cdots$ ②

$A = \sqrt{(-0.00852)^2 + (-0.00611)^2} = 0.01049 \text{ (m)} = 10.49$ mm

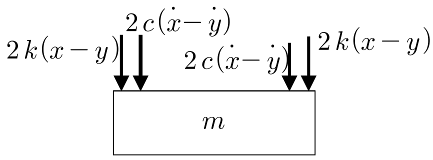
$\phi = \tan^{-1}\dfrac{-0.00852}{-0.00611} = \tan^{-1}(1.394) = 0.949$ rad (= 54.4°)

①과 ②에 따르면 ϕ는 3사분면의 각도이므로, $\quad \phi = 0.949 \text{ rad} + \pi \text{ rad} = 4.09$ rad (= 234°)

4. (a)



또는



(b) $\dfrac{X}{Y} = \dfrac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

그래프 통과 지점 : (0, 1), $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2})$, $(1,\ \sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\ 1)$, $(\infty,\ 0)$

(c) (나)고무줄이 진동 차단에 유리하다. 그 이유는 고무줄의 강성 k가 작아서 고유진동수 ω_n이 작으므로 진동수 비 r이 커서 진동 변위 전달률 X/Y가 1보다 작기 때문이다.

5. (a) $\zeta = 0$ 인 경우 ; (0, 1), $(1,\ \infty)$, $(\sqrt{2},\ 1)$, $(\infty,\ 0)$

$\zeta = 0.5$ 인 경우 ; (0, 1), $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2})$, $(1,\ \sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\ 1)$, $(\infty,\ 0)$

(b) $\zeta \approx 0, \quad r > 1$

$$\frac{F_T}{m_0 e\,\omega_r^2} = \frac{1}{r^2-1} \le 0.2 \quad \Rightarrow \quad r^2-1 \ge 5 \quad \Rightarrow \quad r^2 \ge 6$$

$$\Rightarrow \quad r \ge \sqrt{6} \ (= 2.45)$$

$$\omega_{r1} = \frac{(2\pi\,\mathrm{rad})(300\,\mathrm{rpm})}{60\,\mathrm{s/min}} = 10\,\pi\ \mathrm{rad/s} = 31.4\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega_{r2} = \frac{(2\pi\,\mathrm{rad})(1200\,\mathrm{rpm})}{60\,\mathrm{s/min}} = 40\,\pi\ \mathrm{rad/s} = 125.7\ \mathrm{rad/s}$$

$$r = \frac{\omega_r}{\omega_n} \ge \sqrt{6} \qquad \omega_n \le \frac{\omega_r}{\sqrt{6}}$$

$$\omega_n \le \frac{\omega_{r1}}{\sqrt{6}} = \frac{31.4\,\mathrm{rad/s}}{\sqrt{6}} = 12.82\ \mathrm{rad/s} \qquad 0 < \omega_n \le 12.82\ \mathrm{rad/s}$$

(c) 서술 (핵심 : 바닥에 진동 전달, 바닥 가진, 주변 물체에 진동 가함)

기 계 진 동 학 　　　　2010년 시험2 (나반) 해 답

1. (a) X (바람에 의한 와류(vortex) 의 진동수가 다리 상판의 고유진동수와 같았기 때문)
   (b) X (맥놀이 진동수 $\omega_b = |\omega_n - \omega|$ 이므로, 악기 음의 진동수가 소리굽쇠 기준 진동수보다 클 수도 있고 작을 수도 있어서, 두 악기 음의 진동수가 같으면 맥놀이 현상이 나타나지 않지만, 두 악기 음의 진동수가 다르면 1초 주기의 맥놀이 현상이 나타남.)

2. $\ddot{x}(t) + \omega_n x(t) = f_0 \sin\omega t$

$x_p(t) = A_0 \cos\omega t + B_0 \sin\omega t$

$\dot{x}_p = -\omega A_0 \sin\omega t + \omega B_0 \cos\omega t$ 　　 $\ddot{x}_p = -\omega^2 A_0 \cos\omega t - \omega^2 B_0 \sin\omega t$

$(-\omega^2 A_0 \cos\omega t - \omega^2 B_0 \sin\omega t) + \omega_n^2 (A_0 \cos\omega t + B_0 \sin\omega t) = f_0 \sin\omega t$

$\Rightarrow (\omega_n^2 - \omega^2) A_0 \cos\omega t = 0$, 　　 $(\omega_n^2 - \omega^2) B_0 \sin\omega t = f_0 \sin\omega t$

$\omega \neq \omega_n$ 일 때, $A_0 = 0$, $B_0 = \dfrac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2}$ 　 $\Rightarrow$ 　 $x_p(t) = \dfrac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\omega t$

또는 $x_p(t) = X \sin(\omega t - \theta)$, $X = \dfrac{f_0}{|\omega_n^2 - \omega^2|}$, $\omega_n > \omega$ 일 때 $\theta = 0$, $\omega_n < \omega$ 일 때 $\theta = \pi$

3. (a) m = 9 kg, k = 68,000 N/m, c = 570 kg/s, F_0 = 810 N, f = 10 Hz

ω = (2 π rad) (10 Hz) = 62.8 rad/s

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{68{,}000\ \mathrm{N/m}}{9\ \mathrm{kg}}}$ = 86.9 rad/s, 　 $\zeta = \dfrac{570\ \mathrm{kg/s}}{2\sqrt{(9\ \mathrm{kg})(68{,}000\ \mathrm{N/m})}}$ = 0.364

$\omega_d = \sqrt{1-(0.364)^2}$ (86.9 rad/s) = 80.9 rad/s

$\zeta\omega_n$ = (0.364)(86.9 rad/s) = 31.63 rad/s

$f_0 = \dfrac{810\ \mathrm{N}}{9\ \mathrm{kg}}$ = 90 m/s^2

$X = \dfrac{90}{\sqrt{(86.9^2 - 62.8^2)^2 + [2(0.364)(86.9)(62.8)]^2}}$ = 0.01677 (m) = 16.77 mm

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{2(0.364)(86.9)(62.8)}{86.9^2 - 62.8^2} = \tan^{-1}(1.101)$ = 0.834 rad (= 47.8°)

(b) ζ = 0.3, ω_n = 40 rad/s, ω = 20 rad/s, X = 0.012 m, θ = 0.38 rad

$\omega_d = \sqrt{1-(0.3)^2}$ (40 rad/s) = 38.1 rad/s

$\zeta\omega_n$ = (0.3)(40 rad/s) = 12 rad/s

$x(t) = A e^{-12t} \sin(38.1 t + \phi)$ + (0.012 m) cos(20 t - 0.38)

$\dot{x}(t) = -12 A e^{-12t} \sin(38.1 t + \phi) + 38.1 A e^{-12t} \cos(38.1 t + \phi)$
　　- (0.24 m/s) sin(20 t - 0.38)

$x(0) = A \sin\phi$ + (0.012 m) cos(-0.38) = 0
　　$\Rightarrow$ $A \sin\phi$ = - 0.0111 m <0 　　 ⋯ ①

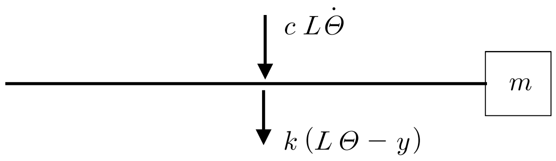
$\dot{x}(0) = -12 A \sin\phi + 38.1 A \cos\phi$ - (0.24 m/s) sin(-0.38) = 0
　　$\Rightarrow$ $A \cos\phi$ = [(12)(-0.0111) - 0.089]/38.1 = -0.00583 (m) <0 ⋯ ②

$A = \sqrt{(-0.0111)^2 + (-0.00583)^2}$ = 0.01254 (m) = 12.54 mm

$\phi = \tan^{-1}\dfrac{-0.0111}{-0.00583} = \tan^{-1}(1.094)$ = 1.087 rad (= 62.3°)

①과 ②에 따르면 ϕ는 3사분면의 각도이므로, 　 ϕ = 1.087 rad + π rad = 4.23 rad (= 242°)

4. (a)



(b) $\Sigma M_O = I_O\,\ddot{\Theta}$ $\qquad$ $I_O = m\,(2L)^2 = 4\ m\,L^2$

$-L\ [k\,(L\,\Theta - y)]\ -\ L\ (c\,L\dot{\Theta}) = 4\ m\,L^2\ \ddot{\Theta}$

$\Rightarrow\quad 4\ m\,L^2\ \ddot{\Theta}\ +\ c\,L^2\,\dot{\Theta}\ +\ k\,L^2\,\Theta\ =\ k\,L\,y$

$\Rightarrow\quad 4\ m\,L\ \ddot{\Theta}\ +\ c\,L\,\dot{\Theta}\ +\ k\,L\,\Theta\ =\ k\ Y\ \sin\omega\,t$

(c) k = 2000 N/m, c = 25 kg/s, m = 30 kg, L = 0.05 m

$\Theta(t) = X\ \sin(\omega\,t\ -\ \theta)$ $\qquad$ X = 0.04 rad, ω = 20 rad/s, θ = 2.14 rad

$F_{tr}(t) = c\,L\dot{\Theta} = c\,L\ \omega\ X\ \cos(\omega\,t\ -\ \theta)$

$F_T = c\,L\,\omega\,X$ = (25 kg/s) (0.05 m) (20 rad/s) (0.06 rad) = 1.5 N

5. (a) ζ = 0.25 인 경우 ; (0, 0), (1, 2), (∞, 1)

ζ = 1 인 경우 ; (0, 0), (1, 0.5), (∞, 1)

(b) $\omega_r \approx \omega_n$

N = (60 s/min) f_r = (60 s/min) (13 cycles/s) = 780 cycles/min = 780 rpm

(c) 진동수 비 r (= ω_r/ω_n)을 크게 하기 위하여 ω_n (= $\sqrt{k/m}$)을 작게 하려면,

질량 m을 크게 하고 강성 k를 작게 함.

감쇠계수의 영향은 거의 없으므로, 감쇠 재료에 비용 투입하지 않음.