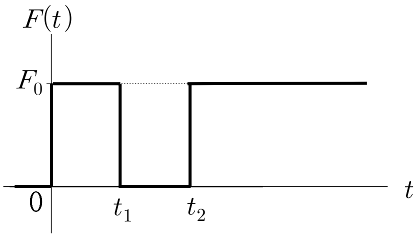
기 계 진 동 학　　2008년 학기말시험 (26점) 문제　　2008. 6. 13.

1.[4점] 역학적 진동에 관한 다음 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표를 ( )안에 하되, 판단 근거를 제시하라. (답도 맞고 판단 근거도 타당해야만 득점)

(a) 진동 측정에 사용되는 압전형 가속도 센서의 사용 주파수 범위는 센서의 고유진동수보다 작다. (　　)
판단 근거 :

(b) 방진 테이블 위에서 가동되는 회전 장치로 인한 테이블의 수직방향 진동을 없애기 위하여, 테이블에 스프링과 질량체로 이루어진 1자유도 계를 수직방향으로 추가할 때, 추가되는 1자유도계의 고유진동수를 방진테이블의 고유진동수와 같게 해야 한다. (　　)
판단 근거 :

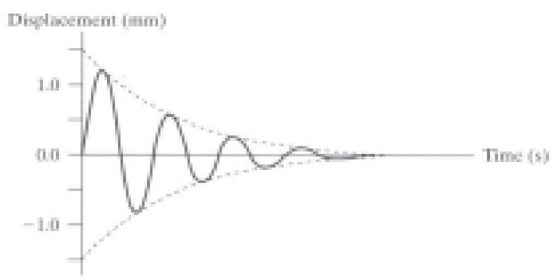
2.[4점] 질량이 m이고 고유진동수가 ω_n인 1자유도 비감쇠계에 다음 그림과 같은 하중 $F(t)$가 가해진다.



(a) $t_1 < t < t_2$ 일 때 응답 $x(t)$를 구하라.

(b) $t > t_2$ 일 때 응답 $x(t)$를 구하라.

3.[6점] 스프링과 댐퍼로 이루어진 충격흡수기(shock absorber)에 질량 값을 모르는 물체를 매달고 수직 아랫방향으로 충격을 가하니 다음과 같이 진동 변위가 관찰되었다.



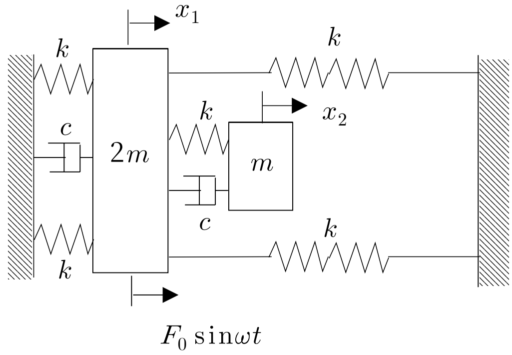
응답 변위의 극값이 +1.32 mm, -0.84 mm, +0.54 mm, ···· 로 측정되었고, 그래프 초기(t=0)의 기울기는 135 mm/s이다.

(a) 충격은 120 N의 일정한 힘이 0.03초 동안 가해진 것이라면, 매달린 물체의 질량은 몇 kg인가?

(b) 이 충격흡수기의 감쇠비 ζ는 얼마인가?

(c) 다른 충격흡수기를 가지고 위와 같이 실험하여 구한 감쇠비가 0에 가까웠고 주기 T가 0.21 s(초)였다. 여기에 질량 4 kg인 물체를 추가로 매달고 실험을 반복하니 주기가 0.25 s(초)로 측정되었다면, 이 충격흡수기의 강성 k는 몇 N/m이고 처음에 매달렸던 물체의 질량은 몇 kg인가?

4.[4점] Consider the two-degree-of-freedom system with the harmonic force $F_0 \sin\omega t$ on the mass $2m$. (a) Draw free-body diagrams. (b,c) Derive the equations of motion. (d) Write the equation in a matrix form.



* 조화가진력 $F_0 \cos\omega t$ 에 대한 응답의 진폭과 위상

$$X = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}$$

5.[4점] 질량이 8 kg이고 강성이 3200 N/m이며 감쇠비(damping ratio) ζ가 0.25인 1자유도계에 다음과 같이 Fourier 급수로 표현된 삼각파형 가진력이 가해질 때 정상상태 응답 $x_p(t)$를 구하라.

$$F(t) = -\frac{8}{\pi^2}\left[\cos 2t + \frac{1}{9}\cos 6t + \cdots\right] \quad \text{(N)}$$

Laplace 변환 (또는 역변환)에 활용될 수 있는 공식

$L\{\delta(t)\} = 1$　　　$L\{\sin\ at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

$L\{\Phi(t)\} = \dfrac{1}{s}$　　　$L\{\cos\ at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

6.[4점] 정지해 있던 1자유도 비감쇠계에 연속적으로 충격을 가한 상황이 다음 운동방정식으로 표현된다.

$$\ddot{x}(t) + 25\ x(t) = 4\ \delta(t) + 2\ \delta(t-0.5)$$

$\delta(t)$는 Dirac 델타 함수이고, 시간 단위는 초(s)이다. 힘이나 운동 변위 등의 단위는 고려하지 않는다. 다음 응답을 <u>라플라스(Laplace) 변환법</u>으로 구하라.

(a) $0 < t < 0.5$초 일 때 응답 $x(t)$

(b) $t > 0.5$초 일 때 응답 $x(t)$

기 계 진 동 학 　　　　2008년 학기말시험 　해 답

1. (a) O 　　판단근거 : $\frac{1}{r^2}\frac{Z}{Y}$ 그래프에서 $r << 1 \quad \Rightarrow \quad \omega << \omega_n$

   (b) X 　　판단근거 : $\omega_{II} = \omega$ (구동진동수)

2. (a) $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^{t_1} F_0 \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-\tau)\right]_0^{t_1} = \dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n t\right]$

   <다른 방법> $0 < t-\tau < t_1 \quad \Rightarrow \quad t > \tau > t-t_1$

   $$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2}\int_{t-t_1}^{t} F_0 \sin\omega_n\tau\,d\tau = -\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n\tau\right]_{t-t_1}^{t} = -\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n t - \cos\omega_n(t-t_1)\right]$$

   (b) $x_1(t) = x_a(t)$

   $$x_2(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_2}^{t} F_0 \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-\tau)\right]_{t_2}^{t} = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \cos\omega_n(t-t_2)\right]$$

   <다른 방법> $t_2 < t-\tau < t \quad \Rightarrow \quad t-t_2 > \tau > 0$

   $$x_2(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^{t-t_2} F_0 \sin\omega_n\tau\,d\tau = -\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n\tau\right]_0^{t-t_2} = -\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_2) - 1\right]$$

   $$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n t\right] + \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \cos\omega_n(t-t_2)\right]$$

   $$= \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \cos\omega_n(t-t_2) + \cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n t\right]$$

3. (a) $\dot{x}(0) = \dfrac{\hat{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{\hat{F}}{\dot{x}(0)} = \dfrac{(120\text{ N})(0.03\text{ s})}{(0.135\text{ m/s})} = 26.7$ kg

   (b) $\delta = \ln\dfrac{1.32}{0.54} = \ln 2.44 = 0.894, \quad \zeta = \dfrac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \dfrac{0.894}{\sqrt{4\pi^2 + 0.894^2}} = 0.141$

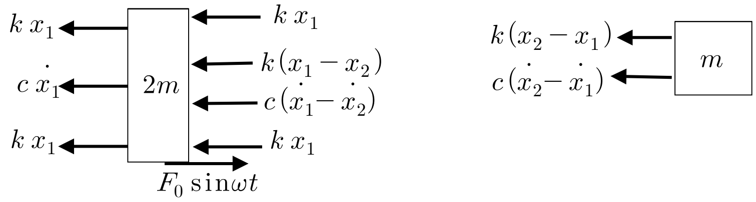
   (c) $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{0.21\text{ s}} = 29.9$ rad/s, $\quad \omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2} = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{0.25\text{ s}} = 25.1$ rad/s

   $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad k = m\,\omega_1^2 \quad \cdots$ ① 　　$\omega_2^2 = \dfrac{k}{m+\Delta m} \quad \Rightarrow \quad k = (m+\Delta m)\,\omega_2^2 \quad \cdots$ ②

   ② - ① $\Rightarrow \quad m = \dfrac{\Delta m\,\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = \dfrac{(4\text{ kg})\,(25.1\text{ rad/s})^2}{(29.9\text{ rad/s})^2 - (25.1\text{ rad/s})^2} = 9.55$ kg

   ① $\Rightarrow \quad k = (9.55\text{ kg})(29.9\text{ rad/s})^2 = 8530$ N/m

4. (a)



(b,c) $$2m\,\ddot{x}_1 = -4\,k\,x_1 - k\,(x_1 - x_2) - c\,\dot{x}_1 - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_0\sin\omega t$$

$$\Rightarrow\ 2m\,\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 5k\,x_1 - k\,x_2 = F_0\sin\omega t$$

$$m\,\ddot{x}_2 = -k\,(x_2 - x_1) - c\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\Rightarrow\ m\,\ddot{x}_2 - c\,\dot{x}_1 + c\,\dot{x}_2 - k\,x_1 + k\,x_2 = 0$$

(d) $$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0\sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. $$\omega_n = \sqrt{\frac{3200\ \mathrm{N/m}}{8\ \mathrm{kg}}} = 20\ \mathrm{rad/s}$$

$$X_1 = \frac{-\dfrac{8}{\pi^2}\dfrac{1}{8}}{\sqrt{(20^2 - 2^2)^2 + [2(0.25)(20)(2)]^2}} = -0.000256\ \mathrm{m} = -0.256\ \mathrm{mm}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{2(0.25)(20)(2)}{20^2 - 2^2} = \tan^{-1}(0.0505) = 2.89° = 0.050\ \mathrm{rad}$$

$$X_2 = \frac{-\dfrac{8}{9\pi^2}\dfrac{1}{8}}{\sqrt{(20^2 - 6^2)^2 + [2(0.25)(20)(6)]^2}} = -0.0000305\ \mathrm{m} = -0.0305\ \mathrm{mm}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{2(0.25)(20)(6)}{20^2 - 6^2} = \tan^{-1}(0.1648) = 9.36° = 0.1633\ \mathrm{rad}$$

$$x_p(t) = X_1\cos(\omega_1 t - \theta_1) + X_2\cos(\omega_2 t - \theta_2) + \cdots$$
$$= [-0.256\ \cos(2t - 0.050)\ -\ 0.0305\ \cos(6t - 0.1633) + \cdots]\ \mathrm{mm}$$

(다른 방법 1)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3200\ \mathrm{N/m}}{8\ \mathrm{kg}}} = 20\ \mathrm{rad/s} \qquad \omega_T = 2\ \mathrm{rad/s}$$

$$F(t) = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} a_m\cos\omega_m t \qquad a_m = -\frac{8}{\pi^2 m^2}$$

$$x_p(t) = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} X_m\cos(\omega_m t - \theta_m)$$

$$X_m = \frac{-\dfrac{8}{\pi^2 m^2}\dfrac{1}{8}}{\sqrt{[20^2 - (2m)^2]^2 + [2(0.25)(20)(2m)]^2}}\ \mathrm{m} = -\frac{1}{\pi^2 m^2}\frac{1}{\sqrt{(400 - 4m^2)^2 + (20m)^2}}\ \mathrm{m}$$

$$\theta_m = \tan^{-1}\frac{2(0.25)(20)(2m)}{20^2 - (2m)^2} = \tan^{-1}\frac{20m}{400 - 4m^2}$$

(다른 방법 2)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3200\ \mathrm{N/m}}{8\ \mathrm{kg}}} = 20\ \mathrm{rad/s}$$

$$F(t) = \sum_m^{\infty} a_m \cos\omega_m t \qquad a_m = -\frac{8}{\pi^2(2m-1)^2}, \quad \omega_m = 2(2m-1)$$

$$x_p(t) = \sum_m^{\infty} X_m \cos(\omega_m t - \theta_m)$$

$$X_m = \frac{-\dfrac{8}{\pi^2(2m-1)^2}\dfrac{1}{8}}{\sqrt{[20^2-(4m-2)^2]^2+[2(0.25)(20)(4m-2)]^2}}\ \mathrm{m}$$

$$= -\frac{1}{\pi^2(2m-1)^2}\frac{1}{\sqrt{[400-(4m-2)^2]^2+[10(4m-2)]^2}}\ \mathrm{m}$$

$$\theta_m = \tan^{-1}\frac{2(0.25)(20)(4m-2)}{20^2-(4m-2)^2} = \tan^{-1}\frac{10(4m-2)}{400-(4m-2)^2}$$

6. (a) $\ddot{x}(t) + 25\ x(t) = 4\ \delta(t)$

$$L \Rightarrow s^2 X(s) + 25X(s) = 4 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{4}{X^2+25} = \frac{4}{5}\frac{5}{X^2+5^2}$$

$$L^{-1} \Rightarrow x(t) = \frac{4}{5}\ \sin 5t$$

(b) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\ddot{x}_2(t) + 25\ x_2(t) = 2\ \delta(t-0.5)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_3(t) + 25\ x_3(t) = 2\ \delta(t), \quad x_2(t) = x_3(t-0.5)$$

$$L \Rightarrow s^2 X_3(s) + 25X_3(s) = 2 \quad \Rightarrow \quad X_3(s) = \frac{2}{X^2+25} = \frac{2}{5}\frac{5}{X^2+5^2}$$

$$L^{-1} \Rightarrow x_3(t) = \frac{2}{5}\ \sin 5t \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{2}{5}\ \sin 5(t-0.5)$$

$$x(t) = \frac{4}{5}\ \sin 5t + \frac{2}{5}\ \sin 5(t-0.5)$$