기 계 진 동 학　　2005년 학기말시험(25점) 문제 (가/나반)　2005. 6. 16.

1.[3점] 다음 물음에 간단히 답하라.

(a) 진동을 이용한 '내구성 시험'의 <u>목적</u>, <u>방법</u>, <u>사례</u>는 무엇인가?

(b) 진동을 이용한 '시스템 진단'의 <u>목적</u>, <u>방법</u>, <u>사례</u>는 무엇인가?

2.[3점] 계단함수 가진에 대한 응답(step response)에 관한 설명이 맞으면 O표, 틀리면 X표 하라. (답이 맞으면 득점, 틀리면 감점, 답하지 않으면 0점)

(a) 질량과 강성이 일정할 때, 감쇠계수 c값이 작을수록 오버슛 극대점에 도달하는 시간이 길어진다. (　　)

(b) 질량과 감쇠계수 c(감쇠비 ζ가 아님)가 일정할 때, 강성 k를 증가시켜도 정착시간(settling time)에는 변함이 없다. (　　)

(c) 질량과 강성이 일정할 때, 감쇠계수 c를 증가시키면 오버슛(overshoot)이 작아지지만, 감쇠계수 c가 아무리 커도 오버슛이 사라지지는 않는다. (　　)

3.[3점] 1자유도계로 간주되는 감쇠 시스템에서, 질량은 4 kg이고 스프링상수는 6,400 N/m이다. 자유진동 동안에 진폭이 5 사이클 후 초기값의 0.20배로 감소하였다. 점성감쇠계수 c를 계산하라.

4.[3점] 질량이 1.5 kg인 강체와 강성이 120 N/m인 스프링으로 구성된 1자유도 비감쇠계에 $F(t) = F_0 t$ 형태의 힘이 $t = 0$인 순간부터 가해진다. 여기서 F_0는 45.0 N이다. 응답 $x(t)$를 구하라.

5.[4점] 3,000 rpm으로 회전하는 모터에 의해 모터 케이스에 생기는 진동을 측정하기 위해 가속도계를 사용하였다. 이 회전수에서 케이스에 4.50 m/s^{2}의 진동 가속도가 생긴다는 것을 레이저 간섭계로 측정하여 알았다. 가속도계로 측정한 결과는 4.95 m/s^{2}이다. 가속도계가 0.02 kg의 움직이는 질량으로 되어 있고 감쇠를 무시할 수 있다면, 가속계 내부의 강성 k는 얼마이겠는가?

* 조화가진력 $F_0 \sin\omega t$ 에 대한 응답의 진폭과 위상

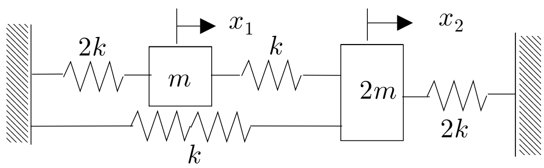
$$X = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}$$

6.[4점] 질량이 2.5 kg이고 강성이 400 N/m이며 감쇠비가 0.20인 1자유도계에 다음과 같이 Fourier 급수로 표현된 톱니파형 가진력이 가해질 때 정상상태 응답 $x_p(t)$를 구하라.

$$F(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin nt \quad \text{(N)}$$

7.[6점] 2자유도계에 대한 다음 물음에 답하라.

(a) 다음 그림과 같은 2자유도 비감쇠계의 자유진동을 나타내는 운동방정식을 구하고, 그 식을 행렬 형태로 표현하라.



(b,c) 질량행렬과 강성행렬이 다음과 같이 표현되는 2자유도 비감쇠계의 고유진동수와 모드형상을 구하라.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

여기서 $m = 10$ kg, $k = 4000$ N/m 이다.

*Laplace 변환 공식: $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s+a}$

$L[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$　　$L[\cos at] = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

8.[4점] 다음 식으로 주어지는 비감쇠시스템의 응답 $x(t)$를 라플라스 변환법을 이용해서 계산하라. 초기조건은 모두 0으로 가정한다.

$$(100 \text{ kg})\ \ddot{x}(t) + (2000 \text{ N/m})\ x(t) = (10 \text{ N})\ e^{-4t}$$

기 계 진 동 학 　　　2005년 학기말시험 (가/나반) 해 답

1. (a) 목적 : 반복 사용에 따른 제품의 성능을 실험적으로 예측
   방법 : 여러 환경에서 동하중을 가한 후 성능 시험을 행함
   사례 : 카 오디오, ····

   (b) 목적 : 기계장치나 구조물의 진단, 즉 이상 유무를 감시
   방법 : 고유진동수와 감쇠비를 정기적으로 측정하여 이들 값의 변화 양상으로부터 이상 유무나 파손 가능성을 예측
   사례 : 베어링, 기어박스, ····

2. (a) X 　 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$

   (b) O 　 $t_s = \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n} = \dfrac{3.5}{\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}} = \dfrac{7\,m}{c}$

   (c) X 　 O.S. $= \dfrac{F_0}{k} e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

3. m = 4 kg, k = 6,400 N/m, n = 5, $\dfrac{x_5}{x_0}$ = 0.20

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{5}\ln\frac{1}{0.20} = 0.322$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0.322}{\sqrt{4\pi^2+(0.322)^2}} = 0.0512$$

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2(0.0512)\sqrt{(4\text{ kg})(6{,}400\text{ N/m})} = 16.4\ \text{kg/s}$$

4. m = 1.5 kg, k = 120 N/m, c = 0, F_0 = 45.0 N

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{120\text{ N/m}}{1.5\text{ kg}}} = 8.94\ \text{rad/s}$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F_0\,(t-\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n}\left\{t\int_0^t \sin\omega_n\tau\,d\tau - \int_0^t \tau\sin\omega_n\tau\,d\tau\right\}$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n}\left\{t\left[\frac{-1}{\omega_n}\cos\omega_n\tau\right]_0^t - \left[\frac{-\tau}{\omega_n}\cos\omega_n\tau\right]_0^t - \left[\frac{1}{\omega_n^2}\sin\omega_n\tau\right]_0^t\right\}$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left\{(-t\cos\omega_n t + t) - (-t\cos\omega_n t + 0) - \frac{1}{\omega_n}(\sin\omega_n t - 0)\right\} = \frac{F_0}{k}\left(t - \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

$$= \frac{45.0\text{ N}}{120\text{ N/m}}\left(t - \frac{1}{8.94\text{ rad/s}}\sin 8.94t\right)$$

$= 0.375\ (t\ -\ 0.112\ \sin 8.94t)$ m

$= 0.375\ t\ -\ 0.042\ \sin 8.94t$ m

5. $\omega_b = (2\pi\,\text{rad})(3000\ \text{rev/min})\dfrac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 314\ \text{rad/s}, \quad m = 0.02\ \text{kg}, \quad \zeta = 0$

$|\ddot{y}| = \omega_b^2\, Y = 4.50\ \text{m/s}^2\ , \qquad \omega_n^2\, Z = 4.95\ \text{m/s}^2$

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{Z}{Y} = \frac{\omega_n^2\, Z}{\omega_b^2\, Y} = \frac{4.95\ \text{m/s}^2}{4.50\ \text{m/s}^2} = 1.10 \qquad \frac{1}{r^2}\,\frac{Z}{Y} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2}} = \frac{1}{1-r^2}$$

$$\frac{1}{1-r^2} = 1.10 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 - \frac{1}{1.10} \quad \Rightarrow \quad r = 0.302$$

$$\omega_n = \frac{\omega_b}{r} = \frac{314\ \text{rad/s}}{0.302} = 1040\ \text{rad/s}$$

$$k = m\,\omega_n^2 = (0.02\ \text{kg})(1040\ \text{rad/s})^2 = 21.6\times 10^3\ \text{N/m}$$

6. $\zeta = 0, \quad m = 2.5\ \text{kg}, \quad k = 400\ \text{N/m}, \quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{400\ \text{N/m}}{2.5\ \text{kg}}} = 12.6\ \text{rad/s}$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\ \cos nt + b_n\ \sin nt), \qquad a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$x_p(t) = x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n\ \sin(nt-\theta)$$

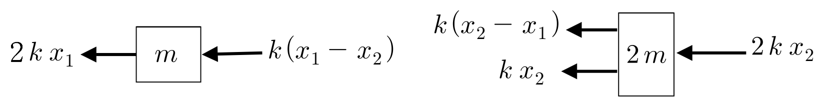
$$x_1(t) = \frac{a_0}{2k} = \frac{1\ \text{N}}{2(400\ \text{N/m})} = 1.25\times 10^{-3}\ \ \text{m}$$

$$X_n = \frac{-\dfrac{1}{n\pi}\,\dfrac{1}{2.5\ \text{kg}}}{\sqrt{[(12.6\ \text{rad/s})^2 - n^2]^2 + [2(0.20)(12.6)(n)]^2}} = \frac{-0.127}{n\sqrt{n^4 - 292n^2 + 25{,}200}}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\frac{2(0.20)(12.6)n}{12.6^2 - n^2} = \tan^{-1}\frac{5.04n}{159 - n^2}$$

$$x_p(t) = 1.25\times 10^{-3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-0.127}{n\sqrt{n^4 - 292n^2 + 25{,}200}}\ \sin\!\left(nt - \tan^{-1}\frac{5.04n}{159-n^2}\right)\quad \text{m}$$

7. (a)



$$m\,\ddot{x}_1 = -2kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad \Rightarrow \qquad m\,\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0$$

$$2m\,\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 - 2kx_2 \qquad\qquad 2m\,\ddot{x}_2 - kx_1 + 4kx_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & 4k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(b) $(-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\ \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} -2m\,\omega_n^2 + 2k & -k \\ -k & -m\,\omega_n^2 + k \end{bmatrix} = (-2m\omega_n^2 + 2k)(-m\,\omega_n^2 + k) - (-k)(-k)$$

$$= 2m^2\,\omega_n^4 - 4mk\,\omega_n^2 + k^2 = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{2mk \pm \sqrt{(2mk)^2 - 2m^2k^2}}{2m^2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\,\frac{k}{m} = 0.293\frac{k}{m},\ 1.707\frac{k}{m}$$

$$\omega_1 = 0.541\sqrt{\frac{4{,}000\ \text{N/m}}{10\ \text{kg}}} = 10.8\ \text{rad/s}, \qquad \omega_2 = 1.307\sqrt{\frac{4{,}000\ \text{N/m}}{10\ \text{kg}}} = 26.1\ \text{rad/s}$$

(c) $(-2m\omega_n^2 + 2k)\ u_1\ -\ k u_2\ =\ 0$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{k}{-2m\omega_n^2 + 2k} = \frac{(k/m)}{2[(k/m) - \omega_n^2]}$$

$\omega_n^2 = \omega_1^2 = 0.293\dfrac{k}{m}$

$\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{1}{2[1-0.293]} = 0.707$

$u_2 = 1$ 일 때 $u_1 = 0.707$

$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0.707 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\omega_n^2 = \omega_2^2 = 1.707\dfrac{k}{m}$

$\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{1}{2[1-1.707]} = -0.707$

$u_2 = 1$ 일 때 $u_1 = -0.707$

$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} -0.707 \\ 1 \end{Bmatrix}$

8. (100 kg) $\ddot{x}(t)$ + (2000 N/m) $x(t)$ = (10 N) e^{-4t}

Laplace 변환

$$100\ s^2 X(s) + 2000\ X(s) = 10\ \frac{1}{s+4}$$

$$100\ (s^2+20)\ X(s) = \frac{10}{s+4}$$

$$X(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{(s+4)(s^2+20)} = \frac{1}{10}\left[\frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+20}\right]$$

$$= \frac{1}{360}\left(\frac{1}{s+4} - \frac{s}{s^2+20} + \frac{4}{\sqrt{20}}\frac{\sqrt{20}}{s^2+20}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{360}\left(e^{-4t} - \cos\sqrt{20}\,t + \frac{4}{\sqrt{20}}\sin\sqrt{20}\,t\right)$$

$$= 2.78\times10^{-3}\ (e^{-4t} - \cos 4.47t + 0.894\ \sin\ 4.47t)\ \text{m}$$