

## 제5장 분포력: 도심과 중심

p.232

### [Distributed Forces: Centroids and Centers of Gravity]

강체 = 매우 많은 질점들의 결합체

각 질점에 작용하는 힘들 (분포력)  $\rightarrow$  (합성)  $\rightarrow$  (집중력) :

2차원 물체 : 평판[flat plates], 평면에 포함되는 (

$\Rightarrow$  면의 도심[圖心, centroids], 주어진 축에 관한 면적 1차 모멘트[first moment]

3차원 물체 (

$\Rightarrow$  입체의 도심, 좌표평면에 관한 부피 1차 모멘트, 무게중심[重心, center of gravity]

## 5.1 평면의 중심과 도심 [Planar Centers of Gravity and Centroids]

### 5.1A 2차원 물체의 중심 [Center of Gravity of a Two-Dimensional Body]

p.234

예. 평판의 중심 (그림 5.1), 선체의 중심 (그림 5.2)

$n$  개의 작은 요소들

좌표[coordinates] :  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

무게[weights] :  $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n$

합력[resultant]  $W$

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \Rightarrow =$$

중심  $G$ 의 좌표  $(\bar{x}, \bar{y})$

합력의 모멘트 = 모멘트의 합 (Varignon의 정리)

$$\bar{x} W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n = \sum_{i=1}^n x_i \Delta W_i \Rightarrow =$$

$$\bar{y} W = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n = \sum_{i=1}^n y_i \Delta W_i \Rightarrow =$$

### 5.1B 면과 선의 도심 [Centroids of Areas and Lines]

p.235

두께가 균일한[uniform] 균질[homogeneous] 평판

$$\Delta W = \gamma t \Delta A$$

$\gamma$  : 비중[比重, specific weight] =

$t$  : 판의 두께[thickness] (m)

균일  $\neq$  균질

$\Delta A$  : 요소의 면적 ( $m^2$ )

$$W =$$

$A$  : 판의 면적

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \Rightarrow A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i =$$

$$\bar{x} W = \sum_{i=1}^n x_i \Delta W_i \Rightarrow \bar{x} A = \sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i = \quad (\text{그림 5.3})$$

$$\bar{y} W = \sum_{i=1}^n y_i \Delta W_i \Rightarrow \bar{y} A = \sum_{i=1}^n y_i \Delta A_i = \quad (\text{그림 5.8A}) \quad \text{p.239}$$

단면이 균일한 균질 선재

$$\Delta W = \gamma a \Delta L$$

$$W =$$

$a$  : 선재의 단면적 [cross-sectional area]

$\Delta L$  : 요소의 길이                      균일  $\neq$  균질

$L$  : 선재의 길이

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \quad \Rightarrow \quad L = \sum_{i=1}^n \Delta L_i =$$

$$\bar{x} W = \sum_{i=1}^n x_i \Delta W_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} L = \sum_{i=1}^n x_i \Delta L_i = \quad (\text{그림 5.4})$$

$$\bar{y} W = \sum_{i=1}^n y_i \Delta W_i \quad \Rightarrow \quad \bar{y} L = \sum_{i=1}^n y_i \Delta L_i = \quad (\text{그림 5.8B}) \quad \text{p.240}$$

예제 5.3 균일한 반원형 봉의 평형

p.244

### 5.1C 면적과 선의 1차 모멘트 [First Moments of Areas and Lines]

p.237

면적  $A$ 의 1차 모멘트 (고체역학에서 활용)

$$y\text{축에 관한 면적 } A \text{의 1차 모멘트 } Q_y = \int x \, dA (=$$

$$x\text{축} \quad " \quad " \quad " \quad Q_x = \int y \, dA (=$$

대칭 [symmetry] 구조

한 개의 대칭 축 (그림 5.5)

대칭 축에 관한 1차 모멘트 =  
도심은 대칭

두 개 이상의 대칭 축 (그림 5.6) 예.

대칭 축에 관한 1차 모멘트 =  
도심은 대칭

대칭 중심 (그림 5.7)

모든 축에 관한 1차 모멘트 =  
도심은 대칭

### 5.1D 복합 판과 선재 [Composite Plates and Wires]

p.240

평판을 공통 형상으로 분할. 예.

(그림 5.9)

판의 무게중심의 좌표  $(\bar{X}, \bar{Y})$

합력의 모멘트 = 모멘트의 합 (Varignon의 정리)

$$\bar{X} \Sigma W = \Sigma(\bar{x} W) \quad \bar{Y} \Sigma W = \Sigma(\bar{y} W)$$

평판 (균질, 균일 두께)

(그림 5.10)

$$Q_y = \bar{X} \Sigma A = \Sigma(\bar{x} A) \quad Q_x = \bar{Y} \Sigma A = \Sigma(\bar{y} A)$$

$$\bar{X} = \quad \bar{Y} =$$

예.(교재에 없음)

그림에 보인 평면도형의 도심의 위치를 구하라.

①  $A =$

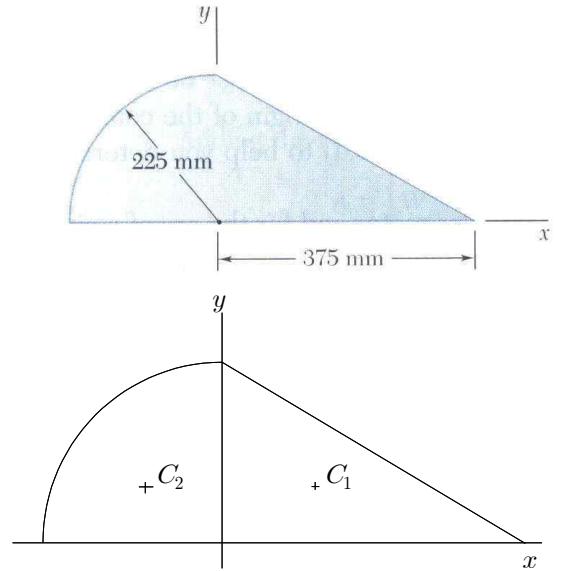
$\bar{x} =$

$\bar{y} = \frac{1}{3}(225 \text{ mm}) = 75 \text{ mm}$

②  $A =$

$\bar{x} =$

$\bar{y} =$



$\Sigma A = 42\,188 \text{ mm}^2 + 39\,761 \text{ mm}^2 =$

$\Sigma(\bar{x}A) = (125 \text{ mm})(42\,188 \text{ mm}^2) + (-95.49 \text{ mm})(39\,761 \text{ mm}^2) = 1\,476\,722 \text{ mm}^3$

$\Sigma(\bar{y}A) = (75 \text{ mm})(42\,188 \text{ mm}^2) + (95.49 \text{ mm})(39\,761 \text{ mm}^2) + = 6\,960\,878 \text{ mm}^3$

$\bar{X} = \frac{1476.722 \times 10^3 \text{ mm}^3}{81.949 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 18.02 \text{ mm}$

$\bar{Y} = \frac{6960.878 \times 10^3 \text{ mm}^3}{81.949 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 84.9 \text{ mm}$

면적 부호[sign] 주의

예.

(그림 5.11)

p.241

예제 5.1 복합 평면 도형

p.242

예.<연습 5.5>

그림에 보인 평면도형의 도심의 위치를 구하라.

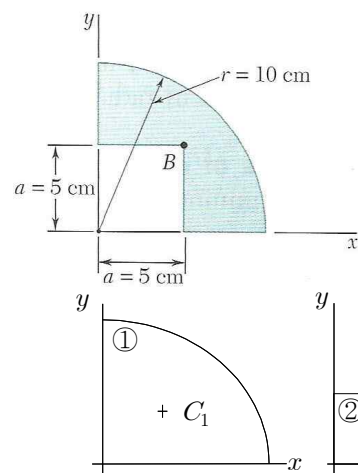
$r = 10 \text{ cm}, a = 5 \text{ cm}$

①  $A = \frac{\pi}{4}(10 \text{ cm})^2 = 78.54 \text{ cm}^2$

$\bar{x} = \frac{4}{3\pi}(10 \text{ cm}) = 4.244 \text{ cm}$

②  $A = -(5 \text{ cm})^2 = -25.00 \text{ cm}^2$

$\bar{x} = \frac{1}{2}(5 \text{ cm}) = 2.50 \text{ cm}$



p.246

$\Sigma A = (78.54 \text{ cm}^2) + (-25.00 \text{ cm}^2) =$

$\Sigma(\bar{x}A) = (4.244 \text{ cm})(78.54 \text{ cm}^2) + (2.50 \text{ cm})(-25.00 \text{ cm}^2) = 270.82 \text{ cm}^3$

$\bar{X} = \frac{270.82 \text{ cm}^3}{53.54 \text{ cm}^2} =$

$\bar{Y} =$

선재 (균질, 균일 단면적)

$$\bar{X} \Sigma L = \Sigma(\bar{x}L) \quad \bar{Y} \Sigma L = \Sigma(\bar{y}L)$$

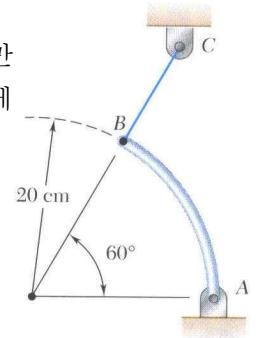
$$\bar{X} = \quad \bar{Y} =$$

예제 5.2 선재의 무게중심

p.243

예.<교재에 없음>

0.8 kg의 균일한 강재[steel] 봉으로 그림과 같이 반지름 20 cm의 원호를 만들었다. 봉은 점 A에서 핀으로 지지되고 B에서 줄 BC로 지지된다. (a) 줄에 걸리는 장력, (b) 점 A에서의 반력을 구하라.



$$m = 0.8 \text{ kg}, \quad r = 0.2 \text{ m}, \quad \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

S; known  $m, r, \alpha$ , unknown  $T_{BC}, \mathbf{A}$

⇒ 2차원 평형, 반력, 원호

A;  $W = (0.8 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.848 \text{ N}$

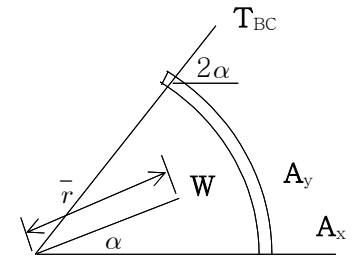
M;

$$\bar{r} = \frac{(0.2 \text{ m}) \sin 30^\circ}{\pi/6} = \frac{0.6}{\pi} \text{ m}$$

(a)  $\Sigma M_A = 0$

$$\Rightarrow T_{BC} = W \frac{r - \bar{r} \cos \alpha}{r \sin 2\alpha}$$

$$= (7.848 \text{ N}) \frac{(0.2 \text{ m}) - \left(\frac{0.6}{\pi} \text{ m}\right) \cos 30^\circ}{(0.2 \text{ m}) \sin 60^\circ} =$$



$$\Rightarrow T_{BC} =$$

(b)  $\Sigma F_x = 0$

$$\Rightarrow A_x = -T_{BC} \cos 2\alpha = -(1.5678 \text{ N}) \cos 60^\circ =$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Rightarrow A_y = W - T_{BC} \sin 2\alpha = (7.848 \text{ N}) - (1.5678 \text{ N}) \sin 60^\circ =$$

$$A = \sqrt{(-0.7839 \text{ N})^2 + (6.490 \text{ N})^2} = 6.537 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{6.490 \text{ N}}{-0.7839 \text{ N}} = -8.279 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(-8.279) =$$

$$\mathbf{A} =$$

R;

T;

연습

## 5.2 도심에 대한 추가 고려사항 [Further Considerations of Centroids]

5.2A 적분에 의한 도심의 결정 [Determination of Centroids by Integration] p.250

( 생략 )

5.2B Pappus-Guldinus의 정리 [Theorems of Pappus-Guldinus] p.251

( 생략 )

## 5.3 도심의 추가 응용 [Additional Applications of Centroids]

5.3A 보에 작용하는 분포하중 [Distributed Loads on Beams] p.262

( 생략 )

\*5.3B 유체에 잠긴 표면에 작용하는 힘 [Forces on Submerged Surfaces] p.263

( 생략 )

## 5.4 입체의 중심과 도심 [Centers of Gravity and Centroids of Volumes]

### 5.4A 3차원 물체의 중심과 도심

#### [Three-Dimensional Centers of Gravity and Centroids]

p.276

3차원 물체의 무게중심[重心, center of gravity]

$n$  개의 작은 요소들

(그림 5.20)

좌표[coordinates] :  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$

무게[weights] :  $\Delta W_i$

합력[resultant]  $W$

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \quad \Rightarrow \quad W =$$

무게중심  $G$ 의 좌표  $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

합력의 모멘트 = 모멘트의 합 (Varignon의 정리)

$$\bar{\mathbf{r}} W = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta W_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}} W =$$

$$\bar{x} W = \int x dW \quad \bar{y} W = \int y dW \quad \bar{z} W = \int z dW$$

입체의 도심[圖心, centroid]

p.277

$$\Delta W = \gamma \Delta V$$

$\gamma$  : 비중[比重, specific weight] = 단위 부피 당 무게 ( $N/m^3$ )

$\Delta V$  : 요소의 부피 ( $m^3$ )

균질 =

$$W = \gamma V$$

$V$  : 물체의 부피

$$\bar{\mathbf{r}} V = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta V_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}} V =$$

$$\bar{x} V = \int x dV \quad \bar{y} V = \int y dV \quad \bar{z} V = \int z dV \quad (\text{그림 5.21}) \quad p.279$$

입체  $V$ 의 1차 모멘트 (고체역학에서 활용)

$$yz \text{ 면에 관한 부피 } V \text{의 1차 모멘트 } \int x dV (=$$

$$zx \text{ 면 " " " } \int y dV (=$$

$$xy \text{ 면 " " " } \int z dV (=$$

대칭[symmetry] 구조

하나의 대칭 평면[plane of symmetry]

대칭 평면에 관한 1차 모멘트 =

도심은 대칭

두 개 이상의 대칭 평면

예.

대칭 평면에 관한 1차 모멘트 =

도심은 대칭

세 개의 대칭 평면의 교차점은

### 5.4B 복합물체 [Composite Bodies]

p.278

물체를 공통 형상으로 분할.

물체의 무게중심의 좌표 ( $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ )

$$\bar{X} \Sigma W = \Sigma(\bar{x} W)$$

$$\bar{Y} \Sigma W = \Sigma(\bar{y} W)$$

$$\bar{Z} \Sigma W = \Sigma(\bar{z} W)$$

균질[homogeneous] 물체 ( $\gamma$ )

$$W =$$

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma(\bar{x} V)$$

$$\bar{Y} \Sigma V = \Sigma(\bar{y} V)$$

$$\bar{Z} \Sigma V = \Sigma(\bar{z} V)$$

$$\bar{X} =$$

$$\bar{Y} =$$

$$\bar{Z} =$$

예제 5.11 복합 입체 도형

p.281

예제 5.12 구멍 있는 기계 요소의 중심

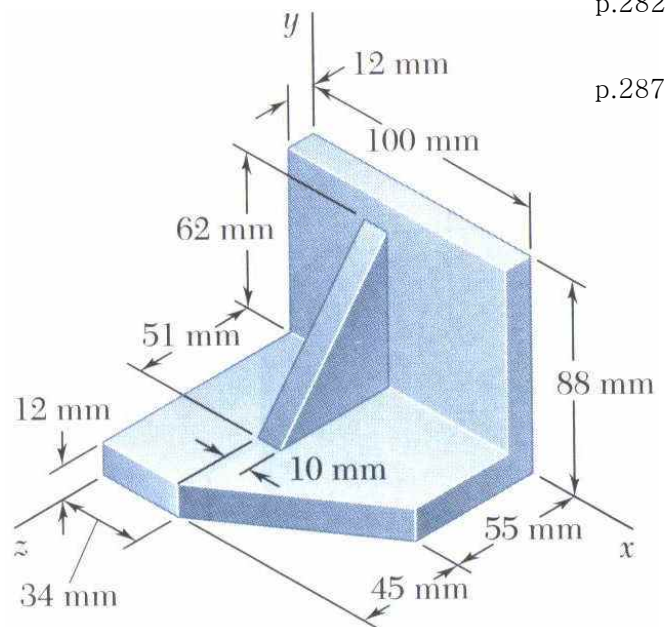
p.282

예.<연습 5.100>

p.287

그림에 보인 정지 브래킷[stop bracket]에서 무게중심의  $x$ 좌표를 구하라.

브래킷은 균질[homogeneous]이어서 무게중심이 도심과 일치한다고 가정함.



①  $V =$

$$\bar{x} =$$

②  $V = (100 \text{ mm})(45 + 55 - 12 \text{ mm})(12 \text{ mm}) = 105\,600 \text{ mm}^3$

$$\bar{x} = \bar{x} \text{①} = 50 \text{ mm}$$

③  $V = \frac{1}{2}(62 \text{ mm})(51 \text{ mm})(10 \text{ mm}) = 15\,810 \text{ mm}^3$

$$\bar{x} =$$

④  $V =$

$$\bar{x} =$$

$$\Sigma V = 105\,600 + 105\,600 + 15\,810 + (-17\,820) \text{ (mm}^3\text{)}$$

=

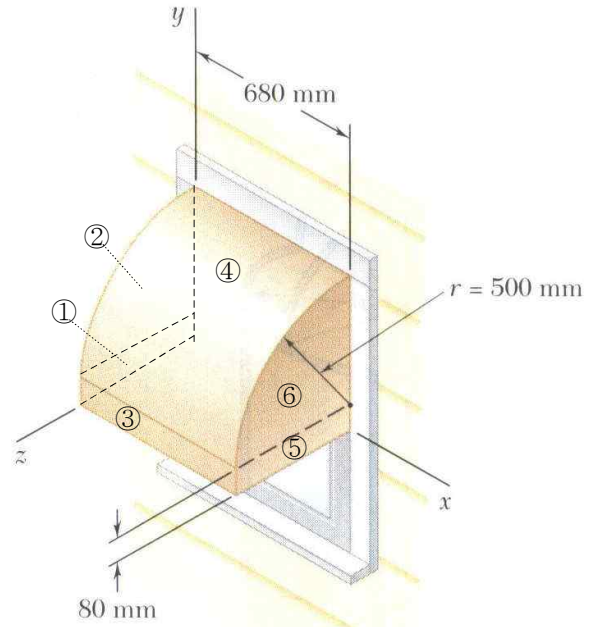
$$\Sigma(\bar{x} V) = (50)(105\,600) + (50)(105\,600) + (39)(15\,810) +$$

$$= 9\,786\,630 \text{ mm}^4$$

$$\bar{X} = \frac{9,786,630 \text{ mm}^4}{209,190 \text{ mm}^3} =$$

응용  $\bar{Y} = 27.2 \text{ mm}$ , 연습 5.101  $\bar{Z} = 26.2 \text{ mm}$

창문의 차양(awning)이 균일한 두께의 금속박판으로 만들어졌다. 차양의 무게중심의 위치를 구하라.



대칭성  $\Rightarrow \bar{X} =$

①  $A =$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(80 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2}(500 \text{ mm}) = 250 \text{ mm}$$

②  $A =$

$$\bar{y} =$$

$$\bar{z} = \frac{4}{3\pi}(500 \text{ mm}) = 212.2 \text{ mm}$$

③  $A =$

$$\bar{y} =$$

$$\bar{z} = 500 \text{ mm}$$

④  $A =$

$$\bar{y} =$$

$$\bar{z} = \frac{2}{\pi}(500 \text{ mm}) = 318.3 \text{ mm}$$

⑤  $A = A① = 40,000 \text{ mm}^2$

$$\bar{y} = \bar{y}① = 40 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \bar{z}① = 250 \text{ mm}$$

⑥  $A = A② = 196,349 \text{ mm}^2$

$$\bar{y} = \bar{y}② = 292.2 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \bar{z}② = 212.2 \text{ mm}$$

$$\Sigma A = 2(40,000) + 2(196,349) + 54,400 + 534,071 = 1,061,169 \text{ mm}^2$$

$$\Sigma(\bar{y}A) = 2(40)(40,000) + 2(292.2)(196,349) + (40)(54,400) + (398.3)(534,071) = 332,842,835 \text{ mm}^3$$

$$\Sigma(\bar{z}A) = 2(250)(40,000) + 2(212.2)(196,349) + (500)(54,400) + (318.3)(534,071) = 300,525,315 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = \frac{332,842,835 \text{ mm}^3}{1,061,169 \text{ mm}^2} =$$

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma(\bar{z}A)}{\Sigma A} = \frac{300,525,315 \text{ mm}^3}{1,061,169 \text{ mm}^2} = 283.2 \text{ mm}$$

연습



5.4C 적분에 의한 입체의 도심의 결정

[Determination of Centroids of Volumes by Integration]

p.280

( 생략 )

예제 5.13 반원뿔의 도심

p.283

$$\bar{x} = \quad , \quad \bar{y} = \quad , \quad \bar{z} =$$

## 제6장 구조물의 해석 [Analysis of Structures]

### 6.1 트러스 해석 [Analysis of Trusses]

### 6.2 다른 트러스 해석 [Other Truss Analyses]

### 6.3 프레임 [Frames]

### 6.4 기계 [Machines]

## 제7장 내력과 내 모멘트 [Internal Forces and Moments]

### 7.1 부재 내의 내력 [Internal Forces in Members]

### 7.2 보 [Beams]

### 7.3 하중, 전단 및 굽힘모멘트 사이의 관계 [Relations among Load, Shear, and Bending Moment]

### 7.4 케이블 [Cables]

### \*7.5 현수선 [Catenary Cables]

## 제8장 마찰 [Friction]

p.431

예.

접촉면[surfaces in contact]에 대한 가정[assumption] (4.1A절)

마찰 없음[frictionless]:

두 면이 자유롭게 움직일 수 있음

마찰 있음[rough] :

두 면의 상대운동을 방해함.

⇒ 마찰력[friction force]

마찰의 유형

1. 건조마찰[dry friction] = 쿨롱마찰[Coulomb friction] :

2. 유체마찰[fluid friction] ⇒

### 8.1 건조마찰법칙 [The Laws of Dry Friction]

p.433

#### 8.1A 마찰계수 [Coefficients of Friction]

p.434

정지마찰[static friction] (그림 8.1b)

마찰력  $F$  = 접촉면 방향의 힘  $P$ 와 평형을 이루는 힘

$$F = \quad (F =$$

마찰력의 최대값  $F_{\max} =$

$N$  : 수직반력[normal component of reaction]

$\mu_s$  : 정지마찰계수[coefficient of static friction]

운동마찰[kinetic friction]

힘  $P$ 가  $F_{\max}$ 을 초과하면,  $F$

(그림 8.1c)

마찰력 크기  $F =$

$\mu_k$  : 운동마찰계수[coefficient of kinetic friction]

마찰계수 : (표 8.1) 무차원 수

$\mu_s$

$\mu_k$

$$\mu_k \approx 0.75 \mu_s$$

p.434

마찰력 방향 : 힘의 방향(또는 운동방향)에 반대방향

네 가지 상황

(그림 8.2)

1. 접촉면 방향의 힘이 없을 때

$$\text{마찰력 없음} \quad P_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \quad \Sigma F = P_x - F =$$

2. 접촉면 방향 힘의 크기가 정지마찰력 최대값보다 작을 때

$$\text{움직임 없음} \quad P_x < \mu_s N \quad \Rightarrow \quad F = \quad \Sigma F = P_x - F =$$

3. 접촉면 방향 힘의 크기가 정지마찰력 최대값에 도달할 때

$$\text{움직이기 직전} \quad P_x = \mu_s N \quad \Rightarrow \quad F = \quad \Sigma F = P_x - F =$$

4. 접촉면 방향 힘의 크기가 정지마찰력 최대값을 초과했을 때

$$\text{이동} \quad P_x > \mu_s N \quad \Rightarrow \quad F = \quad \Sigma F = P_x - F =$$

예제 8.1 경사면에 놓인 블럭[block]

p.438

예.<연습 8.2>

p.447

그림과 같은 블록이 평형상태에 있는지를 판단하고,  $\theta = 35^\circ$  이고  $P = 200\text{ N}$  일 때 마찰력의 크기와 방향을 구하여라.

recall

S;  $\theta = 35^\circ, \quad \alpha = 25^\circ, \quad \mu_s = 0.20, \quad \mu_k = 0.15$

$\beta = \quad = 35^\circ - 25^\circ = 10^\circ$

$P = 200\text{ N}, \quad W = 800\text{ N}$

A;  $\nearrow \Sigma F_n = 0$

$\Rightarrow N = W \cos \alpha - P \sin \beta$   
 $= (800\text{ N}) \cos 25^\circ - (200\text{ N}) \sin 10^\circ =$

$F_{\max} = \quad = (0.20)(690.3\text{ N}) = 138.06\text{ N}$

$\searrow \Sigma F_t = 0$

$\Rightarrow F = -W \sin \alpha + P \cos \beta$   
 $= -(800\text{ N}) \sin 25^\circ + (200\text{ N}) \cos 10^\circ =$

$F_{\max} < |F| \quad \Rightarrow$

부호  $\rightarrow$  마찰력 방향  $\Rightarrow$

$F = \quad = (0.15)(690.3\text{ N}) = 103.54\text{ N} \quad \mathbf{F} =$

R;

T;

예.<교재에 없음>

그림에서 모든 접촉면에서의 마찰계수는  $\mu_s = 0.40, \mu_k = 0.30$  이다. (a) 케이블 AB가 그림과 같이 부착되었을 때, (b) 케이블 AB가 제거되었을 때에 대하여, 30 kg의 블록이 움직이기 시작하는 힘 P를 구하여라.

$W_1 = (20\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) =$

$W_2 = (30\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) =$

(b)  $\uparrow \Sigma F_y = 0 ;$

$\Rightarrow N = W_1 + W_2 = (196.2\text{ N}) + (294.3\text{ N})$   
 $= 490.5\text{ N}$

$\rightarrow \Sigma F_x = 0 ;$

$\Rightarrow P = F = \quad = (0.40)(490.5\text{ N}) = 196.20\text{ N}$

$\mathbf{P} =$

(a) 위 블록

$\uparrow \Sigma F_y = 0 ; \quad \Rightarrow N_1 = W_1 = 196.2\text{ N}$

$F_1 = \quad = (0.40)(196.2\text{ N}) = 78.48\text{ N}$

아래 블록

$\uparrow \Sigma F_y = 0 ;$

$\Rightarrow N_2 = N_1 + W_2 = (196.2\text{ N}) + (294.3\text{ N}) = 490.5\text{ N}$

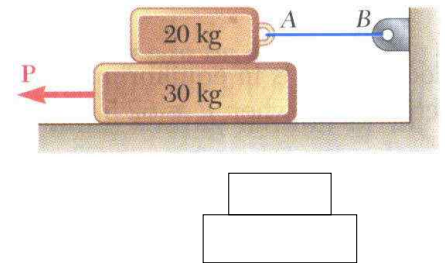
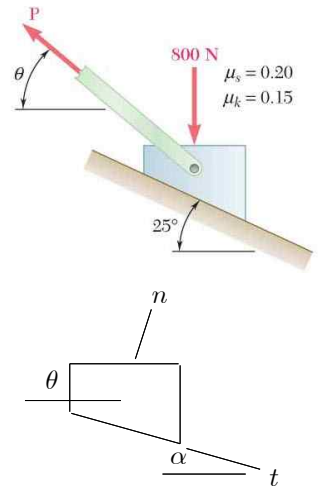
$F_2 = \quad = (0.40)(490.5\text{ N}) = 196.2\text{ N}$

$\rightarrow \Sigma F_x = 0 ;$

$\Rightarrow P = F_1 + F_2 = (78.48\text{ N}) + (196.2\text{ N}) = 274.68\text{ N}$

$\mathbf{P} =$

연습



### 8.1B 마찰각 [Angles of Friction]

p.435

예.

마찰각  $\phi$  :  $\tan\phi = \frac{F}{N}$                        $F$  :                       $N$  :

정지마찰각  $\phi_s$ ,  $\tan\phi_s =$                       ←                       $\tan\phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$

운동마찰각  $\phi_k$ ,  $\tan\phi_k =$                       ←                       $\tan\phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$

네 가지 상황                      (그림 8.3)                      (그림 8.4)

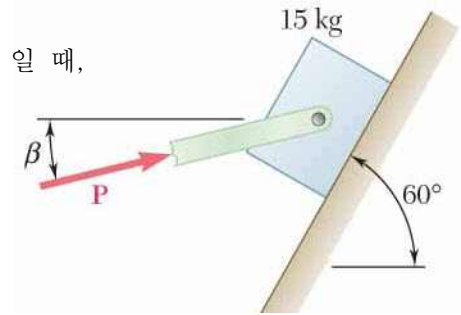
1. 접촉면 방향의 힘이 없을 때  
 마찰력 없음       $F = 0$                       ⇒                       $\phi =$
2. 접촉면 방향 힘의 크기가 정지마찰력 최대값보다 작을 때  
 움직임 없음       $F < \mu_s N$                       ⇒                       $\phi$
3. 접촉면 방향 힘의 크기가 정지마찰력 최대값에 도달할 때  
 움직이기 직전       $F = \mu_s N$                       ⇒                       $\phi = \tan^{-1}\mu_s$
4. 접촉면 방향 힘의 크기가 정지마찰력 최대값을 초과했을 때  
 이동                       $F = \mu_k N$                       ⇒                       $\phi =$

정지각 [angle of repose]                      (그림 8.4 c)                      p.436  
 $\theta = \phi_s$

예제 8.2 경사면의 지지블럭 [support block]                      p.439

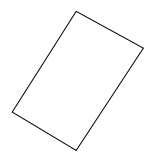
예. <교재에 없음>

그림과 같이 15 kg 블럭과 경사면의 마찰계수가  $\mu_s = 0.25$  일 때,  
 (a) 블럭이 평형상태를 유지하기 위한 P의 최소값,  
 (b) 그 경우의  $\beta$  값을 구하라.



S;  $W = (15 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 147.15 \text{ N}$   
 $\mu_s = 0.25$

A; ⇒  $\phi_s =$   
 P의 크기가 최소                      M;  
 ⇒  
 $\beta = 90^\circ - (30^\circ + 14.04^\circ)$   
 $= 45.96^\circ$   
 ⇒  $\beta =$   
 $P =$   
 $= (147.15 \text{ N}) \sin 45.96^\circ = 105.78 \text{ N}$   
 ⇒  $P =$



R;                      T;

연습

### 8.1C 건조마찰 문제 [Problems Involving of Dry Friction]

p.436

예. 쐐기[wedge] (8.2A), 나사[screw] (8.2B), 저널베어링[journal bearing] (8.3A), 스러스트베어링[thrust bearing] (8.3B), 바퀴 구름[wheel rolling] (8.3C), 기계요소설계 벨트 전동[belt transmission] (8.4), 가속운동 강체의 안정성 (동역학)

<유형 1> 가해지는 힘의 크기, 마찰계수  $\Rightarrow$  미끄럼 여부 (그림 8.5a)  
 풀이 : 자유물체도  $\rightarrow$  평형방정식  $\rightarrow$   
 $F \leq F_m$  이면,  $F > F_m$  이면, <연습 8.1-5>

<유형 2> 작용력의 크기, 물체가 움직이려 함  $\Rightarrow$  정지마찰계수 값 (그림 8.5b)  
 풀이 : 자유물체도  $\rightarrow$  평형방정식  $\rightarrow$   
 마찰력  $F = \mu_s N \rightarrow$

<유형 3> 정지마찰계수, 물체가 움직이려 함  $\Rightarrow$  작용력 (그림 8.5c)  
 풀이 : 자유물체도, 마찰력  $F = \rightarrow$  평형방정식  $\rightarrow$

예제 8.3 기둥과 브래킷[bracket]

p.440

예.<연습 8.26>

p.449

길이가 6.5 m 인 사다리 AB가 그림과 같이 벽에 기대어 있다. 정지마찰계수  $\mu_s$ 가 두 접촉면에 서 갈을 때, 평형이 유지되기 위한  $\mu_s$ 의 최소값을 구하라.

S; 움직이려 할 때,  $F_A = \mu_s N_A, F_B = \mu_s N_B$

M;

A;  $\rightarrow \Sigma F_x = 0 ; \Rightarrow N_B = F_A = \mu_s N_A$

$$F_B = \mu_s N_B = \mu_s (\mu_s N_A) = \mu_s^2 N_A$$

$\uparrow \Sigma F_y = 0 ;$

$$\Rightarrow N_A + \mu_s^2 N_A - W = 0$$

$$\Rightarrow W = (1 + \mu_s^2) N_A$$

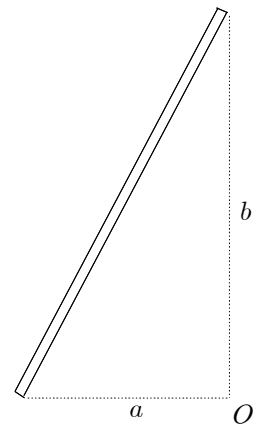
$\curvearrowright \Sigma M_O \Rightarrow = 0 ;$

$$\Rightarrow b (\mu_s N_A) + \frac{a}{2} (1 + \mu_s^2) N_A - a N_A = 0$$

$$\Rightarrow \mu_s^2 + 2 \frac{b}{a} \mu_s - 1 = 0$$

$$\frac{b}{a} =$$

$$\mu_s = -(2.4) \pm \sqrt{(2.4)^2 + 1} = 0.2, -5.0 \Rightarrow \mu_s =$$



R;

T;

## 8.2 쐐기와 나사 [Wedges and Screws]

( 생략 )

### 8.2A 쐐 기 [Wedges]

### 8.2B 사각나사 [Square-Threaded Screws]

## 8.3 축, 원판, 바퀴에서의 마찰 [Friction on Axles, Disks, and Wheels]

### 8.3A 저널 베어링과 축 마찰 [Journal Bearings and Axle Friction]

### 8.3B 쓰러스트 베어링과 원판 마찰 [Thrust Bearings and Disk Friction]

### 8.3C 바퀴 마찰과 구름 저항 [Wheel Friction and Rolling Resistance]

## 8.4 벨트마찰 [Belt Friction]



# 제9장 분포력: 관성모멘트

## [Distributed Forces: Moments of Inertia]

면적 관성모멘트 (

질량 관성모멘트 (

### 9.1 면적 관성모멘트 [Moments of Inertia of Areas]

분포력의 주요 세 유형

1. 두께가 일정한 균질 판의 자중 (5.3~6절)  $\Delta W \propto$
2. 보에 작용하는 분포하중과 정수압 (5.8~9절)  $\Delta W \propto$
3. 3차원 균질 물체의 자중 (5.10~11절)  $\Delta W \propto$

유형 1과 3 : 분포력  $\propto$  면적  $\Delta A$  또는  
 분포력의 합력  $\propto$  면적의 합  $A$  또는  
 축에 관한 합력의 모멘트  $\propto$  축에 관한 면적 또는 부피의

유형 2 : 분포력  $\propto y \Delta A$  ( $y$  : 축으로부터의 거리)  
 분포력의 합력  $\propto$  축에 관한 면적의  
 축에 관한 합력의 모멘트  $\propto$  축에 관한 면적의

#### 9.1A 면적의 2차 모멘트, 즉 면적 관성모멘트

### [Second Moment, or Moment of Inertia, of an Area]

( $x$ 축에 관한) 면적  $A$ 의 2차 모멘트

$$I_x = \int y^2 dA \qquad \text{cf. 1차 모멘트 } Q_x =$$

예1. 보의 순수굽힘[pure bending] (그림 9.1)  
 보의 양단에서 크기가 같고 방향이 반대인 두 우력이 작용하는 균일 단면 보  
 고체역학  $\rightarrow \Delta F = k y \Delta A$   $y$  : 중립축  $x$ 와 면적요소  $\Delta A$  간의 거리  
 (중립축[neutral axis] = 도심을 지나는 축 :  $\bar{y} = 0$ )

합력  $R$ 의 크기

$$R = \Sigma \Delta F \Rightarrow R = \int dF = k \int y dA = 0 \quad (\because \int y dA = \bar{y} A =$$

우력(굽힘모멘트)의 크기

$$M = \int y dF = k \int y^2 dA =$$

$I_x$  의미 :

예2. 수문(또는 댐)의 정수압[hydrostatic pressure] (그림 9.2)

수압은 깊이에 비례  $p = \gamma y$   
 $\Delta F = p \Delta A = \gamma y \Delta A$   $y$  : 수면으로부터의 깊이

수문에 가해지는 힘의 크기

$$R = \Sigma \Delta F \Rightarrow R = \int dF = \gamma \int y dA =$$

모멘트의 크기

$$M = \int y dF = \gamma \int y^2 dA =$$

9.1B 적분에 의한 면적 관성모멘트 결정

p.488

[Determination of the Moment of Inertia of an Area by Integration]

$x$ 축에 관한 면적관성모멘트  $I_x = \int dI_x = \int y^2 dA$  (그림 9.3)

$y$ 축에 " " "  $I_y = \int dI_y = \int x^2 dA$

예. 사각단면의 면적 관성모멘트

(그림 9.4)

p.489

$dA = b dy$        $dI_x = y^2 dA =$

$I_x = \int dI_x = \int_0^h y^2 b dy =$       cf.  $A = bh$

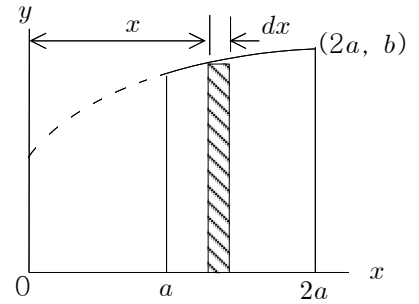
예제 9.1 삼각형

p.491

$I_x = \frac{1}{12}bh^3$        $A = \frac{1}{2}bh$

예.<교재에 없음>

직접 적분하여,  $x$ 축에 관한 면적 관성모멘트와  $y$ 축에 관한 면적 관성모멘트를 구하라.



$x = ky^3$

$(2a, b) \Rightarrow 2a = kb^3 \Rightarrow k =$

$\Rightarrow x = \frac{2a}{b^3}y^3$  또는  $y^3 = \frac{b^3}{2a}x$

$dI_x = = \frac{1}{3} \frac{b^3}{2a} x dx$

$dI_y = = x^2 \left( \frac{b^3}{2a} x \right)^{1/3} dx$

$I_x = \int dI_x = \int_a^{2a} \frac{1}{3} \frac{b^3}{2a} x dx$

$I_y = \int dI_y = \int_a^{2a} \frac{b}{(2a)^{1/3}} x^{7/3} dx$

$= \frac{b^3}{6a} \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_a^{2a} = \frac{b^3}{12a} [(2a)^2 - a^2]$

$= \frac{b}{(2a)^{1/3}} \left[ \frac{3}{10}x^{10/3} \right]_a^{2a} = \frac{3}{10} \frac{b}{2^{1/3}a^{1/3}} [(2a)^{10/3} - a^{10/3}]$

$= = \frac{3}{10} \frac{1}{2^{1/3}} [(2)^{10/3} - 1^{10/3}] a^3 b =$

9.1C 극관성모멘트 [Polar Moment of Inertia]

p.490

$J_O = \int r^2 dA$        $r$  : 점  $O$ 와 면적요소  $dA$  사이의 거리 (그림 9.6)

예.

극관성모멘트와 면적관성모멘트의 관계

$r^2 = x^2 + y^2$

$J_O = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$

=

그림 9.12

p.500

예제 9.2 원형단면

p.492

연습

### 9.1D 면적의 회전반경 [Radius of Gyration of an Area]

p.490

의미 : 면적관성모멘트의 면적이 집중되어 있다고 가정되는 거리

$$I_x = \int y^2 dA = k_x^2 A \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (\text{그림 9.7 b})$$

$$I_y = \int x^2 dA = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (\text{그림 9.7 c})$$

$$J_O = \int r^2 dA = k_O^2 A \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (\text{그림 9.7 d})$$

회전반경 [radius of gyration] :

cf. 도심 [centroid] :

예. 사각단면

(그림 9.8)

p.491

$$A = bh \quad I_x = \frac{1}{3}bh^3$$

$$k_x = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh}} = \sqrt{\frac{1}{3}bh^2} \quad \text{cf. } \bar{y} = \frac{h}{2}$$

예제 9.3 적분에 의한 계산

p.492

예. <교재에 없음>

그림과 같은 면적의  $x$ 축에 관한 관성모멘트와 회전반경을 구하여라.

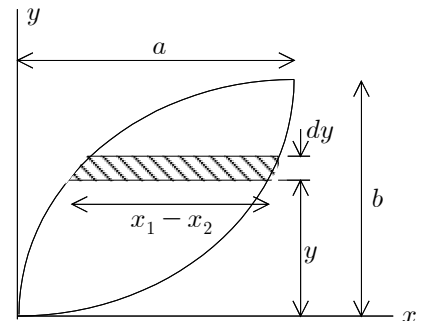
$$y_1 = k_1 x^4, \quad y_2 = k_2 x^{1/4}$$

( $a, b$ )에서

$$\Rightarrow k_1 = \frac{b}{a^4}, \quad k_2 = \frac{b}{a^{1/4}}$$

$$y_1 = \frac{b}{a^4} x^4 \Rightarrow x_1 =$$

$$y_2 = \frac{b}{a^{1/4}} x^{1/4} \Rightarrow x_2 =$$



$$A = b \int_0^a \left( \frac{1}{a^{1/4}} x^{1/4} - \frac{1}{a^4} x^4 \right) dx = b \left[ \frac{4}{5} \frac{1}{a^{1/4}} x^{5/4} - \frac{1}{5} \frac{1}{a^4} x^5 \right]_0^a$$

$$= b \left( \frac{4}{5} a - \frac{1}{5} a \right) =$$

$$dI_x = y^2 (x_1 - x_2) dy$$

$$I_x = \int_0^b y^2 \left( \frac{a}{b^{1/4}} y^{1/4} - \frac{a}{b^4} y^4 \right) dy = \int_0^b \left( \frac{a}{b^{1/4}} y^{9/4} - \frac{a}{b^4} y^6 \right) dy$$

$$= a \left[ \frac{4}{13} \frac{1}{b^{1/4}} y^{13/4} - \frac{1}{7} \frac{1}{b^4} y^7 \right]_0^b = a \left( \frac{4}{13} b^3 - \frac{1}{7} b^3 \right) =$$

$$k_x = \sqrt{\frac{\frac{15}{91} ab^3}{\frac{3}{5} ab}} = \sqrt{\frac{25}{91} b^2} =$$

## 9.2 평행축 정리와 복합 면

### [Parallel-Axis Theorem and Composite Areas]

p.497

#### 9.2A 평행축 정리 [Parallel-Axis Theorem]

A. 면적 관성모멘트에 대해서

$$I = \bar{I} + A d^2 \quad (\text{그림 9.9})$$

$I$  : 임의의 축에 관한 면적 관성모멘트

$\bar{I}$  : 을 지나는 축(도심축[centroidal axis])에 관한 면적 관성모멘트

$d$  : 임의의 축과 도심축 사이의

$$\begin{aligned} \because I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA && y' : \text{도심축으로부터의 좌표} \\ &= \int (y')^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \\ &= \bar{I} + 0 + d^2 A \end{aligned}$$

$$k^2 = \quad \leftarrow \quad A \quad k^2 = A \bar{k}^2 + A d^2$$

예 9.2. 원의 접선에 관한 원형 면적의 관성모멘트

(그림 9.10)

p.498

$$\bar{I} = \frac{1}{4}\pi r^4 \quad I = \quad + (\pi r^2) r^2 =$$

예 9.1. 사각형

(그림 9.8)

p.490

$$I = \frac{1}{3}bh^3 \quad \bar{I} = \quad - (bh)\left(\frac{h}{2}\right)^2 =$$

예 9.3. 삼각형 (교재 참조)

(그림 9.11)

p.498

$$I = \frac{1}{12}bh^3, \quad \bar{I} =$$

(그림 9.12)

p.499

B. 극관성모멘트에 대해서

$$J_O = \bar{J}_C + A d^2$$

$J_O$  : 임의의 지점에 관한 극관성모멘트

$\bar{J}_C$  : [centroid]에 관한 극관성모멘트

$d$  : 임의의 지점과 도심 사이의

$$k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2$$

예. 사각형

$$\bar{J}_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$$

$$J_O = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2) + bh \left[ \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} \right]^2 =$$

(그림 9.12)

9.2B 복합면적의 관성모멘트 [Moments of Inertia of Composite Areas]

p.498

예. I형 강, H형 강

(사진 9.1)

$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

예제 9.4 I형 강

p.502

예제 9.5 구멍 (또는 음의 면적)

p.503

예.<연습 9.35 유사>

p.510

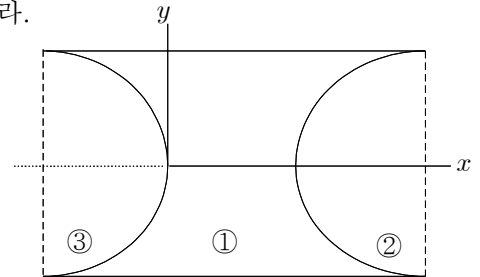
그림과 같은 면적의  $x$  및  $y$ 축에 대한 관성모멘트를 구하라.

$x$ 축에 대한 관성모멘트

①  $I_{x1} =$

②  $I_{x2} =$

③  $I_{x3} =$



$$I_x = 2 a^4 - \frac{\pi}{8} a^4 - \frac{\pi}{8} a^4 = \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) a^4 =$$

$y$ 축에 대한 관성모멘트

①  $I_{y1} = \bar{I}_{y1'} + A_1 \bar{y}_1^2 =$

②  $I_{y2} = \left[ \frac{\pi}{8} a^4 - \frac{\pi}{2} a^2 \left( \frac{4a}{3\pi} \right)^2 \right] + \frac{\pi}{2} a^2 \left( 2a - \frac{4a}{3\pi} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} + 2\pi - \frac{8}{3} + \frac{8}{9\pi} \right) a^4 =$

③  $I_{y3} = \left[ \frac{\pi}{8} a^4 - \frac{\pi}{2} a^2 \left( \frac{4a}{3\pi} \right)^2 \right] + \frac{\pi}{2} a^2 \left( a - \frac{4a}{3\pi} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} + \frac{8}{9\pi} \right) a^4 =$

$$I_y = 6 a^4 - 4.01 a^4 - 0.630 a^4 =$$

연습

\*9.3 관성모멘트의 변환 [Transformation of Moments of Inertia]

9.3A 관성곱 [Product of Inertia]

p.516

$$I_{xy} = \int x y \, dA \quad I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A$$

예제 9.6 직각삼각형

p.520

9.3B 주관성모멘트와 주축 [Principal Axes and Principal Moments on Inertia]

( 생략 )

\*9.4 관성모멘트에 대한 모아원 [Mohr's Circle for Moments of Inertia]

( 생략 )

## 9.5 질량 관성모멘트 [Mass Moments of Inertia]

직선운동  $F = m a$                       회전운동  $M = I \alpha$                        $I :$

### 9.5A 단순질량 관성모멘트 [Moment of Inertia of a Simple Mass]

p.533

질량 관성모멘트 =                      을 변화시키려 할 때 저항의 척도  
 cf. (질량)관성 = 직선운동을                      "                      "                      "

미소 질량  $\Delta m$ , 회전축과의 거리  $r$                       (그림 9.20)

$$\Delta M = r \Delta F = r (\Delta m a) = r \Delta m (r \alpha) = r^2 \Delta m \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta I = r^2 \Delta m$$

$$I = \Sigma r^2 \Delta m \quad \Rightarrow \quad I = \int r^2 dm \quad \text{단위 :}$$

좌표축에 관한 질량 관성모멘트

(그림 9.21)

p.534

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int (z^2 + x^2) dm \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

회전반경 [radius of gyration]  $k$

$$I = k^2 m \quad \Rightarrow \quad k =$$

예제 9.9 가는 봉 [slender rod]

p.539

$$dm = m \frac{dx}{L} = \frac{m}{L} dx$$

$$I_y = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L =$$

### 9.5B 질량 관성모멘트에 대한 평행축 정리

[Parallel-Axis Theorem for Mass Moments of Inertia] p.534

질량 관성모멘트에 대해서

$$I = \bar{I} + m d^2$$

$I$  : 임의의 축에 관한 질량 관성모멘트

$\bar{I}$  : 중심 [重心, center of gravity] 을 지나는 축에 관한 질량 관성모멘트

$d$  : 임의의 축과 중심축 사이의

cf. 면적 관성모멘트의 경우  $I =$

$$\text{회전반경 } k^2 = \quad \quad \quad \text{(그림 9.23)}$$

좌표축에 관한 질량 관성모멘트

(그림 9.22)

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \quad I_y = \bar{I}_{y'} + m (\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad I_z = \bar{I}_{z'} + m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

예. 봉 [rod] (예제 9.9 연속)

$$\bar{I}_{y'} = \quad = \frac{1}{3} mL^2 - m \left( \frac{L}{2} \right)^2 =$$

$$\text{cf. } I_y = \frac{1}{3} mL^2$$

### 9.5C 얇은 판의 관성모멘트 [Moments of Inertia of Thin Plates]

p.536

면 내에 있는  $y$ 축(또는  $z$ 축)에 관한 관성모멘트 (그림 9.24a,b)

$$\begin{aligned}
 I_y &= \rho t \int z^2 dA & \leftarrow & \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dm, \quad x = \quad, \quad dm = \\
 &= \rho t I_y^{\text{area}} \\
 I_z &= \rho t \int y^2 dA \\
 &= \rho t I_z^{\text{area}}
 \end{aligned}$$

'9.5D 3차원 물체의 모멘트'에도 필요함.

면에 수직인  $x$ 축에 관한 관성모멘트 (그림 9.24c)

$$\begin{aligned}
 I_x &= \rho t \int (y^2 + z^2) dA & \leftarrow & \quad I_x = \int (y^2 + z^2) dm, \quad dm = \rho t dA \\
 &= \rho t J_O^{\text{area}} & (9.4\text{절}) & \quad J_O^{\text{area}} = I_y^{\text{area}} + I_z^{\text{area}} \\
 &= I_y + I_z
 \end{aligned}$$

사각평판[rectangular plate]  $a \times b$  (그림 9.25)

$$\begin{aligned}
 m &= \rho t a b \\
 I_y &= \rho t I_y^{\text{area}} = & = \frac{1}{12} (\rho t a b) b^2 = \frac{1}{12} m b^2 \\
 I_z &= \rho t I_z^{\text{area}} = & = \frac{1}{12} (\rho t a b) a^2 = \frac{1}{12} m a^2 \\
 I_x &= & = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

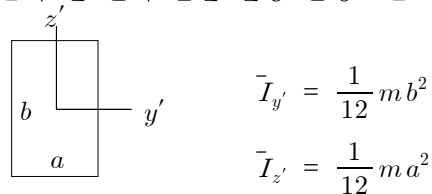
원형평판[circular plate] 반지름  $r$  (그림 9.26)

$$\begin{aligned}
 m &= \rho \pi r^2 t \\
 I_y &= \rho t I_y^{\text{area}} = & = \frac{1}{4} (\rho \pi r^2 t) r^2 = \frac{1}{4} m r^2 \\
 I_z &= I_y = \frac{1}{4} m r^2 \\
 I_x &= & = \frac{1}{2} m r^2
 \end{aligned}$$

그림 9.28

p.538

예. 사각평판의 한 변에 관한 질량 관성모멘트



$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{y'} &= \frac{1}{12} m b^2 \\
 \bar{I}_{z'} &= \frac{1}{12} m a^2
 \end{aligned}$$

길이  $a$ 인 변에 관하여

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m \bar{z}^2 = \quad + m \left( \frac{b}{2} \right)^2 =$$

길이  $b$ 인 변에 관하여

$$I_z = \bar{I}_{z'} + m \bar{y}^2 = \quad + m \left( \frac{a}{2} \right)^2 =$$

그림과 같은 원의 고리를 얇고 균일한 평판에서 잘라냈다. 고리의 질량이  $m$ 일 때, (a) 도심축  $AA'$ 에 관한 질량 관성모멘트, (b) 고리 면에 수직한 도심축  $CC'$ 에 관한 질량 관성모멘트를 구하여라. (안쪽 반지름  $r_1$ , 바깥 반지름  $r_2$ )

$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$m = \rho t A$$

$$\Rightarrow \rho t = \frac{m}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

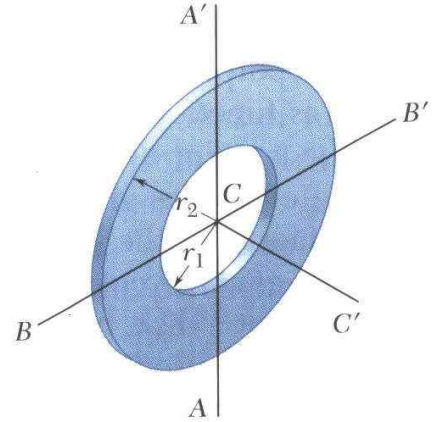
$$I = \rho t I^{\text{area}} =$$

$$(a) I_{AA'}^{\text{area}} = \frac{\pi}{4} r_2^4 - \frac{\pi}{4} r_1^4 = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4)$$

$$I_{AA'} = \frac{m}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4) =$$

$$(b) I_{BB'} = I_{AA'}$$

$$I_{CC'} = 2 \frac{m}{4}(r_2^2 + r_1^2) = \frac{m}{2}(r_2^2 + r_1^2)$$





9.5D (적분에 의한) 3차원 물체의 관성모멘트 결정

p.537

[Determination of the Moment of Inertia of a Three-Dimensional Body by Integration]

$$I = \rho \int r^2 dV \quad \leftarrow \quad I = \int r^2 dm, \quad dm =$$

예제 9.10 사각 기둥 [rectangular prism]

p.539

$$m = \rho a b c \quad dm = \quad dI_z = \frac{1}{12} b^2 dm$$

$$dI_z = \quad = \left( \frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) dm = \left( \frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho b c dx$$

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a \left( \frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho b c dx = \quad = \rho a b c \left( \frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right)$$

$$= m \left( \frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) = \frac{m}{12} (4 a^2 + b^2) \quad (= \frac{1}{3} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2)$$

중심 축에 관한 관성모멘트

$$\bar{I}_z = \quad = \frac{m}{12} (4 a^2 + b^2) - m \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad (= \frac{1}{12} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2)$$

예. 회전체 (원판, 원기둥, 원뿔, 구)

(그림 9.27)

p.537

원판 요소  $dm = \rho \pi r^2 dx$

$$dI_x = \frac{1}{2} r^2 dm \quad dI_y = \frac{1}{4} r^2 dm \quad dI_z = \frac{1}{4} r^2 dm$$

$$dI_y = dI_y + x^2 dm = \left( \frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dm$$

$$dI_z = dI_y = \left( \frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dm$$

예제 9.11 원뿔 [circular cone]

p.540

예.<연습 9.119>

p.546

원기둥의 z축에 관한 질량 관성모멘트를 (직접 적분으로) 구하라. 밀도는 일정하며, 질량은 m으로 가정한다.

$$m = \rho V = \rho \pi a^2 L$$

$$dm =$$

$$dI_z =$$

$$= \frac{1}{4} a^2 dm + x^2 dm = \left( \frac{1}{4} a^2 + x^2 \right) \frac{m}{L} dx$$

$$\bar{I}_z = \frac{m}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{1}{4} a^2 + x^2 \right) dx = 2 \frac{m}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{1}{4} a^2 + x^2 \right) dx$$

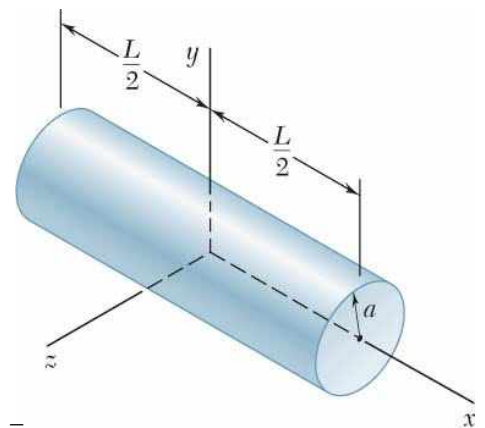
$$= \quad = 2 \frac{m}{L} \left( \frac{1}{4} a^2 \frac{L}{2} + \frac{1}{3} \frac{L^3}{8} \right) =$$

끝면 축에 관한 관성모멘트

$$I_z = \quad = \frac{1}{12} m (3 a^2 + L^2) + \frac{1}{4} m L^2 =$$

중심 축에 관한 관성모멘트  $\bar{I}_x =$

(그림 9.28)



9.5E 복합물체의 관성모멘트 [Moments of Inertia of Composite Bodies] p.537

$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

예제 9.12 rectangular prism and two cylinders p.541

예제 9.13 three-dimensional thin plate p.542

연습

**\*9.6 질량 관성모멘트의 추가 개념**  
[Additional Concepts of Mass Moments of Inertia] p.553

9.6A 질량 관성곱 [Mass Products of Inertia]

( 생략 )

9.6B 주축과 주관성모멘트 [Principal Axes and Principal Moments of Inertia]

( 생략 )

9.6C 임의의 형상 물체의 주축과 주관성모멘트

[Principal Axes and Moments of Inertia for a Body of Arbitrary Shape]

( 생략 )

## 제10장 가상일의 방법 [Method of Virtual Work]

( skip )

서론 [Introduction]

### \*10.1 기본 방법 [Basic Method]

10.1A 힘과 일 [Work of a Force]

10.1B 가상일의 원리 [Principle of Virtual Work]

10.1C 가상일의 원리와 응용 [Applying the Principle of Virtual Work]

10.1D 실제 기계의 역학적 효율 [Mechanical Efficiency of Real Machines]

### \*10.2 일, 위치에너지, 안정성 [Work, Potential Energy, and Stability]

10.2A 유한변위 중 힘과 일 [Work of a Force during a Finite Displacement]

10.2B 위치에너지 [Potential Energy]

10.2C 위치에너지와 평형 [Potential Energy and Equilibrium]

10.2D 평형의 안정성 [Stability of Equilibrium]