제3장 강체: 힘의 등가계 p.83

[Rigid Bodies: Equivalent Systems of Forces]

강체[rigid body] :
힘의 모멘트[moment] (
우력[couple] (
힘과 우력의 등가계 (

3.1 힘과 모멘트 [Forces and Moments]

3.1A 외력과 내력 [External and Internal Forces] p.85

강체에 작용하는 힘을 분류

외력[external forces] : 다른 물체로부터 받는 작용력. (

예. 그림 3.1 (a) 트럭에 작용하는 힘들
(b) 트럭의 자유물체도

힘의 평형이 이루어지지 않을 때 $\Sigma F =$

내력[internal forces] : 구성 요소들을 결합시키는 힘. (

예. 질점계[particle system]
트러스[truss]

내력의 합 $\Sigma f =$

3.1B 전달성의 원리 [Principle of Transmissibility]: p.86
등가력 [Equivalent Forces]

전달성의 원리 (1.2절): (그림 3.2)

강체의 한 점에 작용하는 힘 F를 크기와 방향이 같지만 다른 점에 작용하는 힘 F'로 대치해도 강체의 평형상태나 운동상태에 변함이 없다.

등가력[equivalent forces] : 강체에 대하여 같은 효과를 갖는 두 힘 p.86

미끄럼벡터[sliding vector] (2.1B절) :

예. 트럭을 앞에서 끄는 힘 = 트럭을 (그림 3.3)

3.1C 두 벡터의 벡터곱 [Vector Products] p.87

예.

두 벡터 P와 Q의 벡터곱 V = P × Q
(cf. 3.2A절 두 벡터의 스칼라곱 P · Q =

1. 벡터 V의 작용선 : P와 Q를 포함하는 면에 수직 (그림 3.5a)
2. 벡터 V의 크기 : $V =$
3. 벡터 V의 방향 : 오른손 법칙에 의해 얻음. (그림 3.5b)

벡터곱[vector product] = 크로스곱[cross product] = 외적[outer product]

교환법칙이 성립하지 않음 Q × P =
분배법칙이 성립함 $P \times (Q_1 + Q_2) = (P \times Q_1) + (P \times Q_2)$
결합법칙이 성립하지 않음 $(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$

3.1D 벡터곱의 직각성분 [Rectangular Components of Vector Products] p.89

단위벡터의 벡터곱 (cf. 단위벡터의 스칼라곱)

$i \times i$ = 0, $j \times j$ = 0, $k \times k$ =

$i \times j$ = k, $j \times k$ = i, $k \times i$ = (그림 3.8a)

$i \times k$ = −j, $j \times i$ = −k, $k \times j$ = (그림 3.8b)

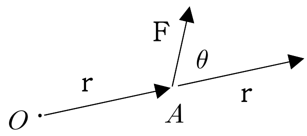
$$V = P \times Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$
$$= (P_y Q_z - P_z Q_y) i + (P_z Q_x - P_x Q_z) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k =$$

3.1E 점에 관한 힘의 모멘트 [Moment of a Force about a Point] p.90

강체의 한 점 A에 작용하는 힘 F (그림 3.10a)

기준점 O와 A를 잇는 벡터 r :

점 O에 관한 F의 모멘트 $M_O = r \times F$ =



3.1C절 ⇒ 두 벡터 r과 F의 벡터곱 (P와 Q)

1. 모멘트 M_O의 작용선은 r과 F를 포함하는 면에 (그림 3.10a)
2. 모멘트 M_O의 방향은(부호는) 오른손 법칙에 의해 얻음 (그림 3.10b)
3. 모멘트 M_O의 크기는 $M_O = r\,(F \sin\theta) = F\,(r \sin\theta) = F\,d$

의미 : 힘 F가 M_O방향의 고정축에 관해 강체를 단위 :

전달성의 원리 (다른 표현) ⇒ F = , M_O = p.92

<u>2차원 문제</u> [Problems Involving Only Two Dimensions] p.92

1. 모멘트 M_O의 작용선은 2차원 면에
2. 모멘트 M_O의 방향은 시계방향[cw] (↻) 또는 반시계방향[ccw; counterclockwise] (↺)

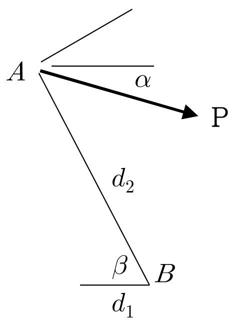
⇒ (그림 3.12)

예제 3.1 지렛대[lever]에 작용하는 힘과 모멘트 p.95

예.<연습 3.3> p.100

판자의 C지점에서 못을 빼기 위해 수직방향 힘 200 N이 필요하다. 못이 움직이려 할 때, (a) 못에 가해지는 힘의 점B에 관한 모멘트, (b) α가 10°인 경우, 같은 모멘트를 만드는 힘 P의 크기, (c) 점B에 관해 같은 모멘트를 만드는 최소 힘 P를 구하여라.

F_C = 200 N, d_1 = 100 mm, d_2 = 450 mm, β = 70° M;



S; known F_C, d_1, d_2, β ⇒

A; (a) M_B = = (0.100 m)(200 N) =

(b) $\alpha = 10°$, $\gamma = 90° - \beta = 90° - 70° = 20°$

$\theta = \gamma + \alpha = 20° + 10° = 30°$

M_B = ⇒ $P = \dfrac{M_B}{d_2 \cos\theta} = \dfrac{20.0\ \text{N} \cdot \text{m}}{(0.450\ \text{m}) \cos 30°}$ =

(c) $P = P_{\min}$ ⇒

M_B = ⇒ $P_{\min} = \dfrac{M_B}{d_2} = \dfrac{20.0\ \text{N} \cdot \text{m}}{0.450\ \text{m}} = 44.44\ \text{N}$ ⇒ $P_{\min}$ =

R; T;

3.1F 힘의 모멘트의 직각성분 p.93

[Rectangular Components of the Moments of a Force]

Varignon의 정리 [Varignon's Theorem]

동일점에 작용하는 여러 힘의 합력의 모멘트 (그림 3.13)

= 여러 힘의

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) + \cdots$$

<u>직각성분</u> p.93

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$ (그림 3.14)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
&= (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times (F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}) \\
&= (y\,F_z - z\,F_y)\,\mathbf{i} + (z\,F_x - x\,F_z)\,\mathbf{j} + (x\,F_y - y\,F_x)\,\mathbf{k} \\
&= \quad \mathbf{i} + \quad \mathbf{j} + \quad \mathbf{k}
\end{aligned}$$

점 A에 작용하는 힘 F의 점 B에 관한 모멘트 (그림 3.15)

$$\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = (x_A - x_B)\,\mathbf{i} + (y_A - y_B)\,\mathbf{j} + (z_A - z_B)\,\mathbf{k}$$

$\mathbf{M}_B =$

예제 3.4 사각 평판[rectangular plate]을 매단 줄[wire]에 의한 모멘트 p.97

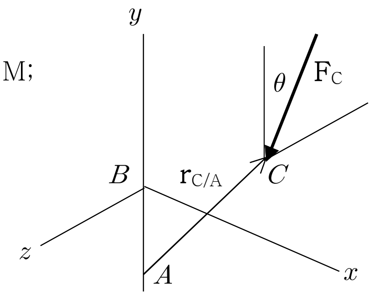
예.<연습 3.23> p.103

200 N 힘이 그림과 같이 브라켓 ABC에 가해진다. 그 힘의 A에 관한 모멘트를 구하여라.

F_C = 200 N, θ = 30°

S; known $\mathbf{F}_C$, θ, unknown $\mathbf{M}_A$ ⇒

M;



A; $\mathbf{r}_{C/A}$ =

$\mathbf{F}_C$ =

$= -(200\text{ N})\cos 30°\ \mathbf{j} + (200\text{ N})\sin 30°\ \mathbf{k}$

$= -173.21\ \mathbf{j} + 100.00\ \mathbf{k}$ (N)

$\mathbf{M}_A$ =

$= [0.060\ \mathbf{i} + 0.075\ \mathbf{j}\ (\text{m})] \times [-173.21\ \mathbf{j} + 100.00\ \mathbf{k}\ (\text{N})]$

$= [(0.075)\times(100.00)]\ \mathbf{i} + [-0.060\times(100.00)]\ \mathbf{j}$

$+ [0.060\times(-173.21)]\ \mathbf{k}$ (N·m)

$= 7.500\ \mathbf{i} - 6.000\ \mathbf{j} - 10.393\ \mathbf{k}$ (N·m)

⇒ $\mathbf{M}_A$ =

R(과정의 타당성);

T(결과의 의미);

<u>**2차원 문제**</u> [Problems Involving Only Two Dimensions] p.94

z = F_z =

r = x i + y j F = F_x i + F_y j (그림 3.16)

$\mathbf{M}_O$ = r × F = (x i + y j) × (F_x i + F_y j)

= ($x\,F_y$ - $y\,F_x$) k

=

점 A에 작용하는 힘 F의 점 B에 관한 모멘트 (그림 3.17)

$\mathbf{r}_{A/B}$ = $x_{A/B}$ i + $y_{A/B}$ j

$\mathbf{M}_B$ = $\mathbf{r}_{A/B}$ × F = ($x_{A/B}$ i + $y_{A/B}$ j) × (F_x i + F_y j)

= ($x_{A/B}$ F_y - $y_{A/B}$ F_x) k

=

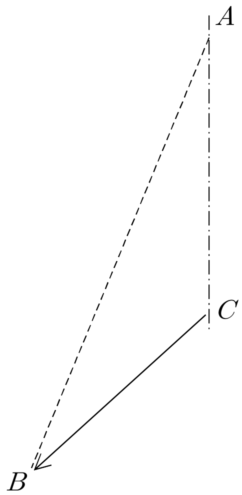
예제 3.2 브래킷[bracket]에 작용하는 힘의 모멘트 p.96

예제 3.3 변속 레버[lever] 끝에 작용하는 힘의 모멘트 p.97

예.<연습 3.14> p.102

연결 봉[connecting rod] AB가 크랭크 BC에 2.5 kN 힘을 AB방향으로 아래 왼쪽으로 가한다. 점 C에 관한 힘의 모멘트를 구하여라.

F_B = 2,500 N



S; known $\mathbf{F}_B$ ⇒ 점 C에 관한 모멘트 M;

A; $x_{B/C}$ = -0.042 m, $y_{B/C}$ = -0.056 m

$\mathbf{r}_{B/C}$ = -0.042 **i** - 0.056 **j** (m)

$x_{B/A}$ = -0.042 m, $y_{B/A}$ = -(0.056 + 0.088) m = -0.144 m

$r_{B/A}$ = $\sqrt{(0.042\text{ m})^2 + (0.144\text{ m})^2}$ = 0.150 m

F_{Bx} = = -700 N

F_{By} = (2,500 N) $\dfrac{-0.144\text{ m}}{0.150\text{ m}}$ = -2,400 N

$\mathbf{F}_B$ = -700 **i** - 2,400 **j** (N)

$\mathbf{M}_C$ =

= [-0.042 **i** - 0.056 **j** (m)] × [-700 **i** - 2,400 **j** (N)]

= [(-0.042)(-2,400) - (-0.056)(-700)] **k** (N · m) = 61.60 (N · m) **k**

⇒ $\mathbf{M}_C$ =

R; 위치벡터 **r**의 종착점은?

T;

연습

3.2 축에 관한 힘의 모멘트 [Moment of a Force about an Axis]

3.2A 스칼라곱 [Scalar Products] p.105

예. (그림 3.19(b))

두 벡터 P와 Q의 스칼라곱 P · Q = (그림 3.18)

(cf. 3.1C절 두 벡터의 벡터곱 P × Q)

스칼라곱[scalar product] = 닷곱[dot product] = 내적[inner product]

교환법칙이 성립함 Q · P =

분배법칙이 성립함 P · (Q_1 + Q_2) = (P · Q_1) + (P · Q_2)

결합법칙은 적용될 수 없음 (P · Q) · S ∵

<u>직각성분</u> p.105

단위벡터의 스칼라곱 cf. 단위벡터의 벡터곱 (3.1D절)

i · i = 1, j · j = 1, k · k =

i · j = 0, j · k = 0, k · i =

P · Q = (P_xi + P_yj + P_zk) · (Q_xi + Q_yj + Q_zk)

=

P = Q 이면, P · P = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 =

<u>응용</u>[applications] p.106

1. 두 벡터가 이루는 각

$P\,Q\cos\theta$ = P · Q ⇒ $\cos\theta$ = (그림 3.19(b))

$$P\,Q\cos\theta = P_x\,Q_x + P_y\,Q_y + P_z\,Q_z \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{P_x\,Q_x + P_y\,Q_y + P_z\,Q_z}{P\,Q}$$

2. 벡터의 투영

$P_{OL} = P\cos\theta$ (그림 3.19(a))

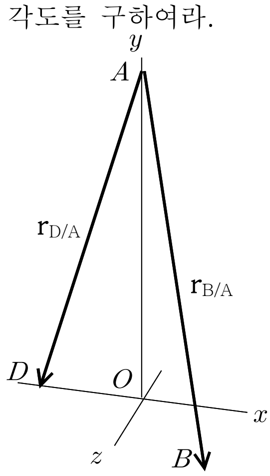
P_{OL} = P · λ λ : (그림 3.19(c))

= (P_xi + P_yj + P_zk) · ($\cos\theta_x$ i + $\cos\theta_y$ j + $\cos\theta_z$ k)

=

예.<연습 3.38> p.114

세 개의 줄이 타워의 꼭대기 A에 연결되어 있다. 줄 AD와 AB가 이루는 각도를 구하여라.



$r_{D/A}$ =

$$r_{D/A} = \sqrt{(-14\ \text{m})^2 + (-48\ \text{m})^2} = 50\ \text{m}$$

$r_{B/A}$ =

$$r_{B/A} = \sqrt{(16\ \text{m})^2 + (-48\ \text{m})^2 + (12\ \text{m})^2} = 52\ \text{m}$$

$r_{D/A} \cdot r_{B/A}$ = [-14 i - 48 j (m)] · [16 i - 48 j + 12 k (m)]

= (-14)(16) + $(-48)^2$ + 0 (m^2) = 2,080 (m^2)

$$\cos\theta = \qquad = \frac{2{,}080\ \text{m}^2}{(50\ \text{m})(52\ \text{m})} = 0.800$$

θ = = ⇒ θ =

3.2B 혼합 3중곱 [Mixed Triple Products] p.106

예.

세 벡터 P, Q, S의 3중곱 $\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$ (그림 3.20(a))

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y)\mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z)\mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x)\mathbf{k} \quad \text{(3.1C절)}$$

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{V} =$$

$$= (S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} + S_z\mathbf{k})\cdot[(P_y Q_z - P_z Q_y)\mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z)\mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x)\mathbf{k}]$$

$$= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x)$$

세 벡터 P, Q, S로 이루어진 평행육면체의 부피 (그림 3.20(b))

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{P}\cdot \qquad = \mathbf{Q}\cdot$$

3.2C 주어진 축에 관한 힘의 모멘트 [Moment of a Force about a Given Axis] p.107

고정축 OL에 관한 모멘트의 크기 (그림 3.22)

OL방향 단위벡터 $\boldsymbol{\lambda}$ =

recall $P_{OL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}$ (3.2B절)

$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_O =$ p.108

$$= (\lambda_x\,\mathbf{i} + \lambda_y\,\mathbf{j} + \lambda_z\,\mathbf{k})\cdot[(yF_z - zF_y)\,\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\,\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}]$$

$$= \lambda_x(yF_z - zF_y) + \lambda_y(zF_x - xF_z) + \lambda_z(xF_y - yF_x) \quad \Rightarrow$$

의미

$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = \boldsymbol{\lambda}\cdot[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\times(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)]$ (그림 3.23)

$$= \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2)$$

$$= \qquad + \qquad + \qquad + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2)$$

$$=$$

의미 : 힘 F가 고정축(OL)에 관해 강체를

의문 : 위치벡터 r의 출발점은?

cf. 위치벡터 r의 종착점은?

점 A에 작용하는 힘 F의 임의의 축 BL에 관한 모멘트의 크기 (그림 3.24)

$$\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$$

$$= (x_A - x_B)\,\mathbf{i} + (y_A - y_B)\,\mathbf{j} + (z_A - z_B)\,\mathbf{k}$$

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_{A/B}\times\mathbf{F})$$

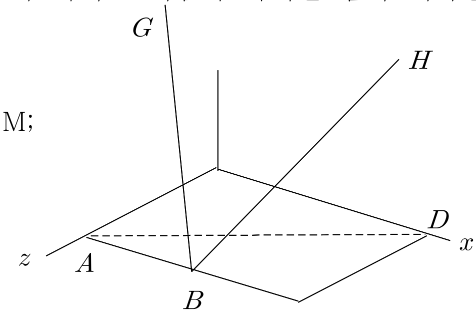
$$M_{CL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_C = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_{A/C}\times\mathbf{F})$$

특수한 경우 $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad M =$

예제 3.5 임의의 점에 관한 모멘트, 임의의 축에 관한 모멘트 p.110

예.<연습 3.57> p.117

프레임 ACD가 A와 D에서 힌지[hinge]되어 있으며, B의 링을 지나고 G와 H에서 고리에 고정된 줄에 매달려 있다. 줄의 장력이 450 N 일 때, 줄 BH에 의해 프레임에 가해진 힘이 대각선 AD에 관해 만드는 모멘트를 구하여라.



T_{BH} = 450 N

S; known T_{BH} ⇒ 축 AD에 관한 모멘트 M;

A; $\mathbf{r}_{B/A}$ =

BH ; d_x = (0.875 - 0.5) (m) = 0.375 (m),

d_y = 0.75 (m), d_z = -0.75 (m)

$d = \sqrt{(0.375\,\mathrm{m})^2 + (0.75\,\mathrm{m})^2 + (-0.75\,\mathrm{m})^2}$ = 1.125 m

$\lambda_{BH} = \frac{1}{1.125}[(0.375)\mathbf{i} + (0.75)\mathbf{j} + (-0.75)\mathbf{k}]$

T_{BH} = = (450 N) $\frac{1}{1.125}[(0.375)\mathbf{i} + (0.75)\mathbf{j} + (-0.75)\mathbf{k}]$

= 150 **i** + 300 **j** - 300 **k** (N)

$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathrm{T}_{BH}$ = [(0.5 m) **i**] × [150 **i** + 300 **j** - 300 **k** (N)]

= [0] **i** + [0 - (0.5)(-300)] **j** + [(0.5)(300) - 0] **k** (N · m)

=

$\lambda_{AD} = \frac{(0.5\,\mathrm{m} + 0.5\mathrm{m})\mathbf{i} + (-0.75\,\mathrm{m})\mathbf{k}}{\sqrt{(1.0\,\mathrm{m})^2 + (-0.75\,\mathrm{m})^2}} = \frac{1}{1.25\,\mathrm{m}}[(1.0\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (-0.75\ \mathrm{m})\mathbf{k}]$

= 0.8 **i** - 0.6 **k**

M_{AD} =

= [0.8 **i** - 0.6 **k**] · [150 **j** + 150 **k**] (N · m)

= 0 + 0 + (-0.6)(150) (N · m)

= -90.0 (N · m) ⇒ M_{AD} =

R;

T;

연습

3.3 우력과 힘-우력 계 [Couples and Force-Couple Systems]

3.3A 우력의 모멘트 [Moment of a Couple] p.119

예.

우력[偶力, couple] :

크기가 같고, 작용선이 평행하며, 방향이 반대인 두 힘 F와 -F (그림 3.25)

힘의 합 = , 모멘트의 합 = ⇒

우력의 모멘트[moment of a couple]

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ $\mathbf{r}$: 우력의 두 힘의 작용점을 연결하는 벡터 (그림 3.26)

방향 : 우력의 두 힘을 포함하는 평면에

크기 : $M = r F \sin\theta$ = (그림 3.27)

특성 1) 어느 점에서나 작용할 수 있는 (2.1B절) cf.

∵ 좌표축의

2) $F_1 d_1 = F_2 d_2$ 이고 같은 평면에 있으면, 두 우력(F_1, $-F_1$)과 (F_2, $-F_2$)의

(그림 3.28)

3.3B 등가우력 [Equivalent Couples] p.120

= 모멘트가 같은 두 우력 (F_1, $-F_1$)과 (F_2, $-F_2$) ⇒

같은 평면 내에 있거나 (그림 3.29 a와 b)

서로 평행한 평면 내에 있다. (그림 3.29 b와 c)

3.3C 우력의 합성 [Addition of Couples] p.122

모멘트가 M_1과 M_2인 두 우력의 합 = 모멘트가 인 우력 (그림 3.32)

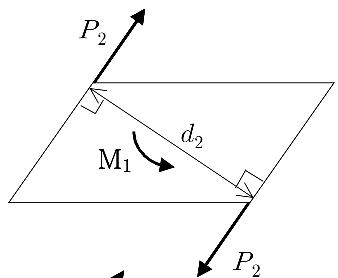
예.<연습 3.72> p.131

평행사변형 모양의 평판에 두 우력이 가해지고 있다. (a) 두 개의 84 N 힘에 의한 우력 모멘트, (b) 두 우력의 합이 0일 때 48 N 힘들 간의 수직 거리, (c) 우력 합이 시계방향 2.88 N·m이고 d가 420 mm일 때 α의 값을 결정하여라.

(a) $P_1 = 84$ N, $d_1 = 0.16$ m

$M_1 = d_1 P_1 = (0.16 \text{ m})(84 \text{ N}) = 13.44 \text{ N}\cdot\text{m}$

⇒ M =



(b) $P_2 = 48$ N, $M_2 = d_2 P_2$

$M = M_1 + M_2 = 0$

$M = M_1 - M_2 = M_1 -$

⇒ $d_2 = \quad = \dfrac{13.44 \text{ N}\cdot\text{m}}{48 \text{ N}} =$

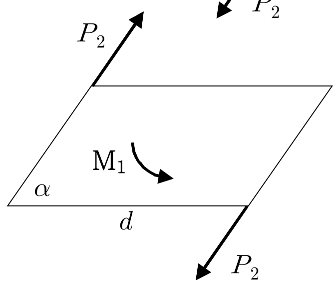
(c) M = 2.88 N·m ↺, $d = 0.42$ m

$M = M_1 + M_2$

$-M = M_1 - M_2 = M_1 -$

$\sin\alpha = \quad = \dfrac{(2.88 + 13.44)\text{ N}\cdot\text{m}}{(0.42\text{ m})(48\text{ N})} = 0.8095$

⇒ $\alpha = \sin^{-1}(0.8095) = 54.0°$



3.3D 우력 벡터 [Couple Vectors] p.122

우력의 두 힘의 합 = , 모멘트의 합 =

⇒

우력 벡터[couple vector] = (그림 3.33(b))

특성 1) (모멘트 벡터와 마찬가지) (그림 3.33(c))

2) 우력의 성분 벡터 M_x, M_y, M_z로 (그림 3.33(d))

예제 3.6 두 우력과 동등한[equivalent] 단일 우력의 성분들 p.125

3.3E 한 힘을 다른 힘과 우력으로의 분해 p.123

[Resolution of a Given Force into a Force at O and a Couple]

예. cf.

<u>분해</u>[resolution] p.124

위치벡터 r로 정의되는 강체의 한 점 A에 작용하는 힘 F (그림 3.34(a))

= 힘 F의 점 O에 관한 모멘트 M_O (= r×F)와 같은 모멘트를 갖는

+ 점 O에 작용하는 (그림 3.34(b,c))

⇒ 힘-우력 계(系)[force-couple system]

<u>합성</u>[sum]

서로 수직한 힘 F와 우력벡터 M_O =

예제 3.7 두 우력과 힘을 단일 힘으로 대치 p.126

예.<연습 3.81> p.133

500 N 힘이 그림과 같이 구부러진 판에 작용한다. (a) B에서 등가의 힘-우력 계, (b) A에서 수직력과 B에서의 힘으로 구성된 등가계를 구하여라.

P = 500 N ↘60°, r_{Bx} = -0.300 m, r_{By} = 0.175 m, r_{Ax} = -0.425 m, r_{Ay} = 0.250 m

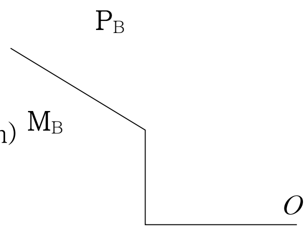
(a) ΣF : $P_B = P$ = 500 N ⇒ P_B =

↻ΣM_O :

$M_B = -\, r_{Bx}\; P_{By} + r_{By}\; P_{Bx}$

= -(-0.300)( ) + (0.175)( ) (N · m)

= -86.15 (N·m) ⇒ M_B =



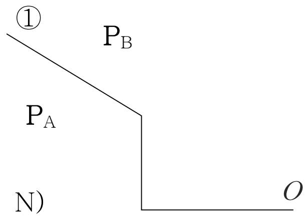
(b) ΣF_x : = (500 N) cos60° = 250 N

ΣF_y : = -(500 N) sin60° = -433 N ⋯ ①

↻ΣM_O :

(-0.425) P_A + (-0.300) P_{By} = (0.175) (250 N)

= 43.75 N ⋯ ②



(0.300)×① +② ; (0.300-0.425) P_A = (0.300)(-433 N) + (43.75 N)

⇒ P_A = 689.2 N ⇒ P_A =

① ; P_{By} = (-433 N) - P_A = (-433 N) - (689.2 N) = -1,122.2 N

$P_B = \sqrt{(250)^2 + (-1{,}122.2)^2}$ = 1,149.7 N, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-1{,}122.2}{250}$ = $\tan^{-1}(-4.489)$ = -77.4°

⇒ P_B =

연습

3.4 역계(力系)를 단순화 [Simplifying Systems of Forces]

3.4A 역계(力系)를 힘과 우력으로 변환 p.138

[Reducing a System of Forces to a Force-Couple System]

강체 내의 위치벡터 r_1, r_2, r_3, …로 정의되는 점들에 작용하는 힘 F_1, F_2, F_3, … (그림 3.36(a))

= 점 O에 작용하는 R과 $\mathrm{M}_O{}^R$의 계[system] (그림 3.36(c))

$$\mathrm{R} = \Sigma \mathrm{F}, \qquad \mathrm{M}_O{}^R = \Sigma \mathrm{M}_O =$$

직각성분

$$\mathrm{r} = x\ \mathrm{i} + y\ \mathrm{j} + z\ \mathrm{k}, \qquad \mathrm{F} = F_x\ \mathrm{i} + F_y\ \mathrm{j} + F_z\ \mathrm{k}$$

$$\mathrm{R} = R_x\ \mathrm{i} + R_y\ \mathrm{j} + R_z\ \mathrm{k} \qquad \mathrm{M}_O{}^R = M_x{}^R\ \mathrm{i} + M_y{}^R\ \mathrm{j} + M_z{}^R\ \mathrm{k}$$

예제 3.8 (a),(b) 보[beam]에 작용하는 힘들 p.145

예제 3.10 브래킷[bracket]의 케이블에 의해 작용되는 힘들 p.147

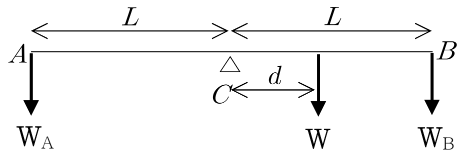
예.<연습 3.105> (문제 (b) 변형) p.154

시소의 양쪽 끝 A와 B에 앉아 있는 아이들의 무게가 각각 420 N과 320 N이다. 무게가 300 N인 세 번째 아이가 B와 C의 사이에 앉는다. (a) 이 아이가 어디에 앉아야 세 아이의 무게의 합력이 점 C를 통과하겠는가? (b) 이 아이가 B와 C의 중앙에 앉는다면 시소의 C 지점에 가해지는 힘과 우력은 얼마인가?

S; L = 1.8 m

W_A = 420 N, W_B = 320 N, W = 300 N

M;

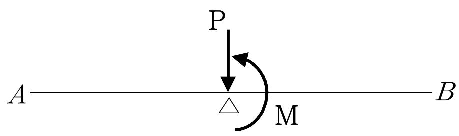


A; (a) ΣM_C =

=

$$\Rightarrow \quad d = \frac{(W_A - W_B)L}{W} = \frac{[(420\ \mathrm{N}) - (320\ \mathrm{N})](1.8\ \mathrm{m})}{300\ \mathrm{N}} = 0.600\ \mathrm{m}$$

(b) d = 0.9 m



P =

= (420 + 320 + 300) N

= $\Rightarrow$ P =

M =

= [(420 N)(1.8 m) - (320 N)(1.8 m) - (300 N)(0.9 m)]

= $\Rightarrow$ M =

R;

T;

(생 략)

3.4B 등가 및 균등 역계 [Equivalent and Equipollent Systems of Forces] p.139

등가 역계

= 강체에서 같은 힘-우력 계로 변환될 수 있는 두 역계 (F_1, F_2, F_3, …),와 (F_1', F_2', F_3', …)

⇒ 두 역계의 힘의 합이 같고, 동일한 점에 대한 모멘트의 합이 같다

: 균등[equipollent]

$$\Sigma F = \Sigma F', \qquad \Sigma M_O = \Sigma M_O'$$

직각성분

$$\Sigma F_x = \Sigma F_x', \quad \Sigma F_y = \Sigma F_y', \quad \Sigma F_z = \Sigma F_z'$$
$$\Sigma M_x = \Sigma M_x', \quad \Sigma M_y = \Sigma M_y', \quad \Sigma M_z = \Sigma M_z'$$

균등 역계 p.140

= $\Sigma F = \Sigma F'$와 $\Sigma M_O = \Sigma M_O'$를 만족하는 두 벡터(力)계

강체에서 균등 벡터계는 등가 계이다.

(여러 질점들에서 균등 벡터계는 등가 계가 아니다.) Photo 3.3

3.4C 역계의 단순화 [Further Reduction of a System of Forces] p.140

(3.4A절) 강체 내의 위치벡터 r_1, r_2, r_3, … 로 정의되는 점들에 작용하는 힘 F_1, F_2, F_3, …

= 점 O에 작용하는 등가힘 R과 등가우력 M_O^R의 계[system] (그림 3.38(b))

1) R = 0 이면, 주어진 역계 = 단일 합우력[resultant couple] M_O^R

2) R ≠ 0 이면, 주어진 역계 = 점 A에 작용하는 단일 합력 R, (그림 3.38(c))

(벡터 R과 점 O의 수직 거리 $d = \dfrac{M_O^R}{R}$)

$r \times R = M_O^R$

예제 3.8(c) 보에 작용하는 힘들 p.145

예제 3.9 항공모함 예인선 p.146

예제 3.11 네 기둥[column]의 합력과 작용점 p.148

*3.4D 역계의 렌치로의 변환 p.143

[Reduction of a System of Forces to a Wrench]

제4장 강체의 평형 [Equilibrium of Rigid Bodies] p.170

강체의 평형 $R = \Sigma F = 0$ cf.

$M_O^R = \Sigma M_O = \Sigma(r \times F) = 0$

병진운동이나 을 시키지 않음,

자유물체도

2차원에서의 평형 (

3차원에서의 평형 (

자유물체도 [Free-Body Diagram] p.172

≡ 작용하는 모든 힘들을 보여주는 독립적인 도표 (2.3C절)

문제 풀이의 첫 단계 :

강체의 평형 ← 물체에 작용하는 모든 힘을 고려 : 작용력[applied forces],

물체에 직접 작용하지 않는 힘을

1. 자유물체 선정

   지면이나 다른 물체로부터 분리, 고립된 물체의

2. 모든 외력 표시

   지면이 가하는 힘, 분리된 물체가 가하는 힘,

   내력[internal force]은

3. 외력의 크기와 방향

   이미 알고 있는 외력의 크기와 방향을

   자유물체가 받는 힘의 방향

4. 미지의 외력

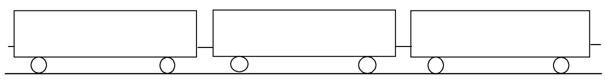
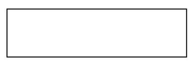
   반력[reactions] : 지지되거나

   구속력[constrained forces] : 자유물체가 동일 위치에

5. 치수

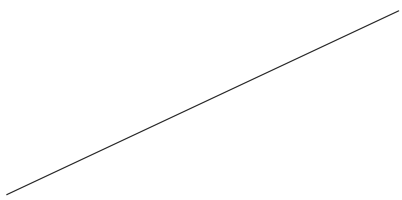
   계산에 필요한 치수 표시

예. 열차 객차

예.<연습 4.F2> p.189

레버 AB가 C에서 힌지(hinge)되고 A에서 제어 케이블에 매여 있다. 레버의 B에 수직방향 힘 200 N이 작용한다면, 케이블의 장력과 C의 반력을 구하기 위한 자유물체도(F.B.D.)를 그려라.



4.1 2차원에서의 평형 [Equilibrium in Two Dimensions] p.173

2차원 구조물의 2차원 힘 (구조물, 작용력, 반력이

4.1A 2차원 구조물의 지지점과 연결점에서의 반력 p.173

[Reactions at Supports and Connections for a Two-Dimensional Structure]

예. 사진 p.173

유형 1. 작용선을 알고 크기를 모르는 반력 (그림 4.1) p.174

예.

마찰 없는 봉[rod]에 연결된 칼러[collar], 홈[slot] 안의 마찰 없는 핀[pin]

하나의 미지수 :

유형 2. 방향과 크기를 모르는 반력

예. 핀 지지 또는 힌지[hinge], 거친 면[rough surface] 즉

두 개의 미지수 :

유형 3. 힘과 우력에 등가인 반력

예. 고정[fixed] 지지

세 개의 미지수 :

4.1B 2차원에서 강체의 평형 [Rigid Body Equilibrium in Two Dimensions] p.175

평형방정식

R = ΣF = 0 2차원(xy 평면) ⇒ $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$

$M_O^R = \Sigma M_O = \Sigma(r\times F) = 0$ $\Sigma M_A = 0$

개의 식 → 개의 미지수를 구할 수 있음

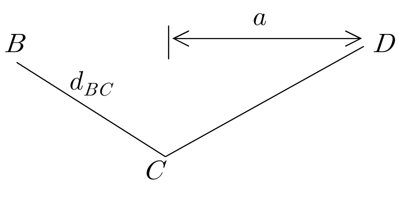
예제 4.1 고정된 크레인[fixed crane] p.179

예제 4.4 고정된 지지점의 반력과 우력 모멘트 p.182

예.<연습 4.17> p.192

두 링크 AB와 DE가 그림과 같이 벨 크랭크[bell crank]에 연결되어 있다. 링크 AB의 장력이 720 N 일 때, (a) 링크 DE의 장력, (b) C에서의 반력을 구하여라. 크랭크의 무게는 무시하여라.

S; F_B = 720 N, a = 120 mm, d_{BC} = M;



A; (a) $+\circlearrowleft\Sigma M_C = 0$:

$$\Rightarrow \quad F_D = \qquad = (720\text{ N})\frac{100\text{ mm}}{120\text{ mm}} = 600\text{ N}$$

(b) $\Sigma F_x = 0$:

$$\Rightarrow \quad C_x = F_{Bx} = \qquad = \frac{3}{5}(720\text{ N}) = 432\text{ N}$$

$\Sigma F_y = 0$:

$$\Rightarrow \quad C_y = F_D + F_{By} = F_D + \qquad = (600\text{ N}) + \frac{4}{5}(720\text{ N}) = 1{,}176\text{ N}$$

$$C = \qquad = \sqrt{(432\text{ N})^2 + (1{,}176\text{ N})^2} = 1{,}253\text{ N}$$

$$\tan\theta = \qquad = \frac{1{,}176}{432} = 2.722 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(2.722) = 69.83°$$

C =

R;

T;

다른 조합의 평형방정식 p.176

1) $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$

2) $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$, $\Sigma M_C = 0$

예제 4.2 세 하중[load]이 작용하는 보[beam]의 반력 p.180

예제 4.3 경사 궤도[track] 짐차 케이블의 인장력과 바퀴[wheel]의 반력 p.181

예제 4.5 (자유물체도) p.183

예.<연습 4.F1> p.189

1,400 kg의 픽업트럭의 짐칸에 각각의 질량이 350 kg인 나무상자가 그림과 같이 놓여 있다. (a) 두 뒷바퀴 A, (b) 두 앞바퀴 B의 각 바퀴에 작용하는 힘을 구하여라.

S; d_1 = 1.7 m, d_2 = 2.8 m, d_3 = 1.8 m M;

d_4 = 1.2 m, d_5 = 0.75 m

$m_C = m_D$ = 350 kg, m_G = 1,400 kg

$W_C = W_D$ = (350 kg)(9.81 m/s^2) = 3,434 N

W_G = (1,400 kg)(9.81 m/s^2) = 13,734 N

A; (a) $+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$;

$$\Rightarrow \ R_A = \frac{1}{2(d_3+d_4)}\left[(d_1+d_2-d_5)W_C + (d_2-d_5)W_D + d_4 W_G\right]$$

$$= \frac{1}{2(3.0\text{ m})}\left[(3.75\text{ m})(3{,}434\text{ N}) + (2.05\text{ m})(3{,}434\text{ N}) + (1.2\text{ m})(13{,}734\text{ N})\right]$$

$$= \frac{36{,}398\text{ N}\cdot\text{m}}{6.0\text{ m}} = 6{,}066.3\text{ N} \qquad \Rightarrow \qquad R_A =$$

(b) $+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$;

$$\Rightarrow \ R_B = \frac{1}{2(d_3+d_4)}\left[-(d_1+d_2-d_3-d_4-d_5)W_C + (d_3+d_4+d_5-d_2)W_D + d_3 W_G\right]$$

$$= \frac{1}{2(3.0\text{ m})}\left[-(0.75\text{ m})(3{,}434\text{ N}) + (0.95\text{ m})(3{,}434\text{ N}) + (1.8\text{ m})(13{,}734\text{ N})\right]$$

$$= \frac{25{,}408\text{ N}\cdot\text{m}}{6.0\text{ m}} = 4{,}234\text{ N} \qquad \Rightarrow \qquad R_B =$$

R; T;

연습

4.1C 부정정반력, 부분구속[Statically Indeterminate Reactions. Partial Constraints]p.177

정정반력[靜定反力, statically determinate reaction]

예. 핀 지지 + 롤러 지지 (그림 4.2)

개의 미지수 : 3 개의 평형방정식으로

부정정반력[不靜定反力, statically indeterminate reaction]

예. 핀 지지 + 핀 지지 (그림 4.4)

개의 미지수 : 3 개의 평형방정식으로

부분구속[partial constraints]

예. 롤러 지지 + 롤러 지지 (그림 4.5)

개의 미지수 : 3 개의 평형방정식 중

4.2 두 가지 특별한 경우 [Two Special Cases] p.199

4.2A 두 힘이 작용하는 물체의 평형 [Equilibrium of a Two-Force Body] p.199

: 평형의

두 힘의 크기가 , 작용선이 , 부호가 (그림 4.8 c)

∵ ⇒ ⇒

모멘트 : $\Sigma M_O = \Sigma(r \times F) = 0$ 은

∵ $(r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2)$의 크기 =

4.2B 세 힘이 작용하는 물체의 평형 [Equilibrium of a Three-Force Body] p.199

: 평형의

세 힘의 작용선은 평행이거나

1) 작용선이 평행

$F_2 + F_3 = F_a$, 두 힘 F_1과 F_a가 작용하는 경우에 해당

2) 작용선이 (그림 4.9 c)

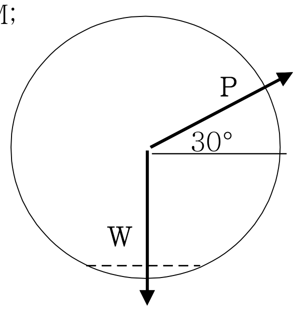
$\Sigma M_O = \Sigma(r \times F)$ ⇒ $\Sigma M_D = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 =$

예제 4.6 기둥 끝 로프의 인장력과 지면 반력 p.201

예.<연습 4.72(b)> p.204

지름이 80 mm이고 무게가 40 N인 롤러가 그림과 같이 타일 바닥에 놓여 있다. 타일의 두께가 3 mm일 경우, 롤러를 오른쪽으로 잡아당겨서 타일 위로 움직이는 데에 필요한 힘 P를 구하여라.

S; W = 40 N, r = 40 mm, t = 3 mm M;



A; α =

$\cos\beta$ = $= \dfrac{(40-3)\text{ mm}}{40\text{ mm}}$

= 0.925

⇒ $\beta = \cos^{-1}0.925 = 22.3°$

θ =

= 180° - 60° - 22.3° = 97.7°

sine 공식 $\dfrac{P}{\sin\beta}$ =

⇒ $P = W\dfrac{\sin\beta}{\sin\theta} = (40\text{ N})\ \dfrac{\sin 22.3°}{\sin 97.7°} = 15.32\text{ N}$ ⇒ P =

R;

T;

연습

4.3 3차원에서의 평형 [Equilibrium in Three Dimensions] p.207

4.3A 3차원에서 강체의 평형 p.207

[Equilibrium of a Rigid Body in Three Dimensions]

ΣF = 0 ⇒ $\Sigma F_x = 0,\quad \Sigma F_y = 0,\quad \Sigma F_z = 0$

ΣM$_O$ = Σ(r×F) = 0 ⇒ $\Sigma M_x = 0,\quad \Sigma M_y = 0,\quad \Sigma M_z = 0$

개의 미지수까지 풀이 가능

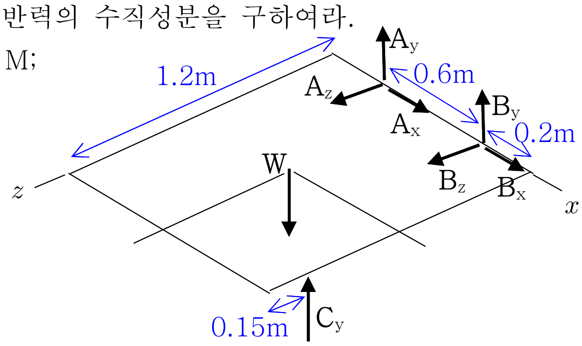
점 O를 적절히 선택하면, 개의 미지 반력 성분 소거

예제 4.7 롤러로 받친 사다리[ladder]의 반력 p.210

예.<연습 4.99> p.219

1 m × 1.2 m 이고 질량이 18 kg인 나무 판이 바닥의 입구를 덮고 있다. 이 판은 A와 B에서 힌지로 지지되어 있고, 작은 블록 C에 의해 바닥보다 약간 위에 놓여 있다. (a) A에서 반력의 수직성분, (b) B에서 반력의 수직성분, (c) C에서 반력의 수직성분을 구하여라.

S; W = (18 kg)(9.806 m/s^2) = 176.51 N M;



A; (c) $\Sigma M_x = 0$;

⇒ C_y = 100.86 N ⇒ C$_y$ =

(a) $\Sigma M_{Bz} = 0$;

⇒ A_y = 121.88 N ⇒ A$_y$ =

(b) $\Sigma M_{Az} = 0$;

⇒ B_y = -46.225 N ⇒ B$_y$ =

R;

T;

4.3B 3차원 구조물의 반력 p.207

[Reactions for a Three-Dimensional Structure]

미지수 1, 2, ⋯ , 6 (그림 4.10)

6가지 기본운동(세 방향 병진운동, 세 방향 회전운동) 중에서 불가능한 운동

1. 볼 지지[ball supports], 마찰 없는 면[frictionless surfaces], 케이블[cables]
   반력의 크기
2. 마찰면 위의 롤러[rollers on rough surfaces], 레일 위의 바퀴[wheels on rails]
   두 반력
3. 마찰면[rough surfaces], 볼-소켓 지지[ball-and-socket support]
   세 반력
4. 유니버설 조인트[universal joint] (사진 4.3)
   세 반력과 한 우력
5. (반지름 방향 힘만 지지하는) 힌지[hinge], 베어링[bearing]
   두 반력과 두 우력
6. 핀과 브래킷[pin and bracket], (축력도 지지하는) 힌지, 베어링 (사진 4.4)
   세 반력(과 두 우력)
7. 고정 지지[fixed support]
   세 반력과 세 우력

예제 4.8 볼-소켓과 두 케이블로 지지된 간판 p.211
예제 4.9 케이블과 베어링으로 지지된 판 p.212
예제 4.10 볼-소켓과 케이블로 지지된 관 p.214

정정반력[靜定反力, statically determinate reaction] (참고)

미지수의 개수(6)가 평형 식의 개수와 일치

부정정반력[不靜定反力, statically indeterminate reaction]

미지수의 개수(6 초과)가 평형 식의 개수보다 많음

부분구속[partial constraints]

미지수의 개수(6 미만)가 평형 식의 개수보다 적음

부적절구속[improper constrain]

지지점에서의 반력들이 평행하거나 동일 선상에 놓여 있는 경우

평형방정식 일부가 만족되지 않음