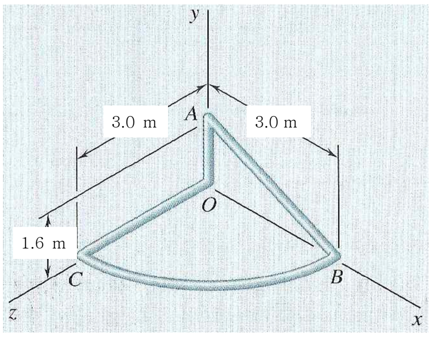
정 역 학　　2022년 학기말시험 (가/나반) [28점]　　2022. 12. 8.

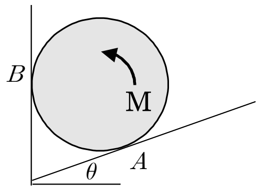
1.[4점(=1+3)] 강체 역학에 관한 다음 문제에 답하여라.
(a) 경사진 컨베이어 벨트로 상자를 운반한다. 벨트와 상자 접촉면의 정지 마찰계수와 운동 마찰계수는 각각 0.30과 0.25이다. 상자가 미끄러지지 않고 이동하게 할 때, 속도가 일정한 컨베이어의 최대 경사각은 몇°인가?

(b) A thin steel wire with a uniform cross-section is bent into the shape shown. Determine $\overline{X}$ of its center of gravity.



2.[3점] 문제1(b)에 보인 선재(wire)의 단위길이 당 질량이 0.25 kg/m이다. y축에 관한 질량 관성모멘트 I_y를 구하여라.

3.[6점(=2+3+1)] 단면도에 보인 원통의 무게는 W이고 반지름은 r이다. A 및 B 지점에서 정지 마찰계수는 μ_s이고 운동 마찰계수는 μ_k이다. 원통이 회전하지 않는다면 가해질 수 있는 최대 우력모멘트 M의 크기 M을 S.M.A.R.T. 과정에 따라 구하여라. (주어진 기호로 표현, 0<θ<90°)

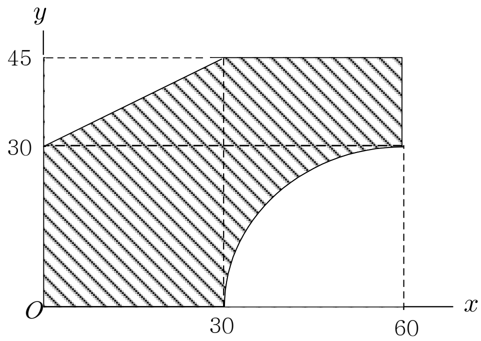


(a) 전략(strategy)과 모델링(modeling)

(b) 해석(analysis)

(c) ① 선택한 해석(analysis) 과정의 타당성을 서술하고,
② 결과의 물리적 의미를 서술하여라.

4.[8점(=2+3+3)] 어떤 보(beam)의 단면이 그림과 같다. 치수 단위는 mm이다.

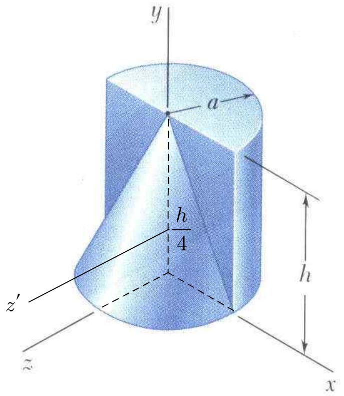


(a) 도심(centroid)의 $\overline{X}$좌표를 구하여라.

(b) 이 단면의 y축에 관한 면적 관성모멘트 I_y와 회전반경(radius of gyration) k_y를 구하여라.

(c) 이 단면의 x축에 관한 면적 관성모멘트 I_x와 O점에 관한 극관성모멘트(polar moment of inertia) J_O를 구하여라.

5.[7점(3+2+2)] 복합물체에서 알루미늄 반원기둥의 밀도는 ρ_A이고, 철강 반원뿔의 밀도는 ρ_S이다. 주어진 기호로 답을 표현하여라.



(a) 무게중심의 $\overline{Z}$를 구하여라.

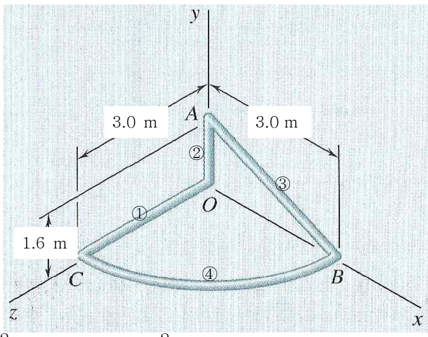
(b) y축에 관한 질량 관성모멘트 I_y를 구하여라.

(c) $y = \dfrac{h}{4}$에 있는 z'축에 관한 질량 관성모멘트 $I_{z'}$를 구하여라.

정 역 학 2022년 학기말시험 (가/나반) 해 답

1. (a) 최대 경사각 = 정지각(angle of repose) = 정지마찰각 ϕ_s = $\tan^{-1}\mu_s$ = $\tan^{-1}0.30$ = 16.70°

(b) r = 3.0 m, h = 1.6 m



① $L = r = 3.0$ m, $\bar{x} = 0$

② $L = h = 1.6$ m, $\bar{x} = 0$

③ $L = \sqrt{r^2+h^2} = 3.4$ m, $\bar{x} = \dfrac{r}{2} = 1.5$ m

④ $L = \dfrac{1}{4}(2\pi r) = 4.71$ m, $\bar{x} = \dfrac{2}{\pi}r = 1.910$ m

ΣL = 3.0 + 1.6 + 3.4 + 4.71 m = 12.71 m

$\Sigma(\bar{x}L)$ = (0)(3.0) + (0)(1.6) + (1.5)(3.4) + (1.910)(4.71) m^2 = 14.10 m^2

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(\bar{x}L)}{\Sigma L} = \frac{14.10\ \text{m}^2}{12.71\ \text{m}} = 1.109\ \text{m}$$

2. ρA = 0.25 kg/m

① m_1 = (0.25 kg/m)(3.0 m) = 0.750 kg, $I_{y1} = \dfrac{1}{3}m_1L_1^2 = \dfrac{1}{3}(0.750\ \text{kg})(3.0\ \text{m})^2$ = 2.25 kg·m^2

② $I_{y2} \approx 0$

③ m_3 = (0.25 kg/m)(3.4 m) = 0.850 kg, $I_{y3} = \dfrac{1}{3}m_3L_3^2 = \dfrac{1}{3}(0.850\ \text{kg})(3.0\ \text{m})^2$ = 2.55 kg·m^2

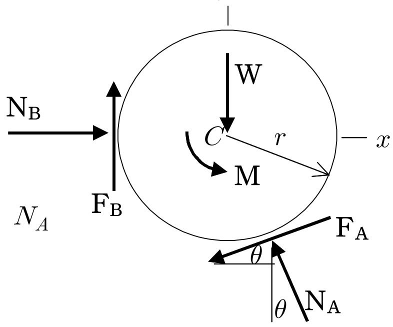
④ m_4 = (0.25 kg/m)(4.71 m) =1.1775 kg, $I_{y4} = m_4 r^2$ = (1.1775 kg)(3.0 m)^2 = 10.60 kg·m^2

$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4}$ = 2.25 + 0 + 2.55 + 10.60 m = 15.40 kg·m^2

3. (a) S; known W, r, μ_s, μ_k, θ, unkonwn 최대 M

⇒ 2차원 평형방정식, 최대 정지마찰력

M; F.B.D.



(b) A; 최대 정지마찰력 $F_A = \mu_s N_A$, $F_B = \mu_s N_B$

$\rightarrow\Sigma F_x = 0$; $N_B - N_A \sin\theta - F_A \cos\theta = 0$

⇒ $N_B = N_A \sin\theta + \mu_s N_A \cos\theta = (\sin\theta + \mu_s \cos\theta)\ N_A$

$F_B = \mu_s N_B = \mu_s(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)\ N_A$

$\uparrow\Sigma F_y = 0$; $N_A \cos\theta - F_A \sin\theta + F_B - W = 0$

⇒ $N_A \cos\theta - \mu_s N_A \sin\theta + \mu_s(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)\ N_A - W = 0$

⇒ $(1 + \mu_s^2) \cos\theta\ N_A - W = 0$ ⇒ $N_A = \dfrac{1}{(1+\mu_s^2)\cos\theta} W$

⇒ $F_A = \dfrac{\mu_s}{(1+\mu_s^2)\cos\theta} W$, $F_B = \dfrac{\mu_s(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{(1+\mu_s^2)\cos\theta} W$

$\circlearrowleft\Sigma M_C = 0$; $M - r(F_A + F_B) = 0$

⇒ $M = r(F_A + F_B) = \dfrac{\mu_s(1+\sin\theta+\mu_s\cos\theta)}{(1+\mu_s^2)\cos\theta} r W$

(c) R ; (가령, 모멘트 식 보다 힘 평형식을 먼저 사용하는 이유를 서술)

T ; (가령, θ=0에 비해 0<θ<90° 일 때 M이 더 큼, A 지점 마찰이 없으면 θ에 무관함)

4. (a)① 직사각형, A = (60 mm)(45 mm) = 2,700 mm^2, $\qquad \bar{x} = \frac{1}{2}$(60 mm) = 30 mm

② 삼각형, $A = -\frac{1}{2}$(30 mm)(15 mm) = −225 mm^2, $\qquad \bar{x} = \frac{1}{3}$(30 mm) = 10 mm

③ 1/4원, $A = -\frac{1}{4}\pi(30\ \text{mm})^2 = -706.9\ \text{m}^2$,

$$\bar{x} = (60\ \text{mm}) - \frac{4}{3\pi}(30\ \text{mm}) = (60\ \text{mm}) - (12.732\ \text{mm}) = 47.27\ \text{mm}$$

ΣA = 2,700 + (−225) + (−706.9) mm^2 = 1,768.1 mm^2

$\Sigma(\bar{x}A)$ = (30)(2,700) + (10)(−225) + (47.27)(−706.9) mm^3 = 45,334 mm^3

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(\bar{x}A)}{\Sigma A} = \frac{45{,}334\ \text{mm}^3}{1{,}768.1\ \text{mm}^2} = 25.64\ \text{mm} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X} = 25.6\ \text{mm}$$

(b) $I_{y1} = \frac{1}{3}(45\ \text{mm})(60\ \text{mm})^3 = 3{,}240{,}000\ \text{mm}^4$

$I_{y2} = \frac{1}{12}(15\ \text{mm})(30\ \text{mm})^3 = 33{,}750\ \text{mm}^4$

$I_{y3} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{4}(30\ \text{m})^4 - (706.9\ \text{m}^2)(12.732\ \text{mm})^2 + (706.9\ \text{m}^2)\ (60-12.732\ \text{m})^2$

$= 159{,}043 - 114{,}591 + 1{,}579{,}401\ \text{mm}^4 = 1{,}623{,}853\ \text{mm}^4$

$I_y = I_{y1} - I_{y2} - I_{y3} = 3{,}240{,}000 - 33{,}750 - 1{,}623{,}853\ \text{mm}^4 = 1{,}582{,}397\ \text{mm}^4$

$\Rightarrow \qquad I_y = 1.582\times10^6\ \text{mm}^4$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1.582\times10^6\ \text{mm}^4}{1{,}768.1\ \text{mm}^2}} = 29.88\ \text{mm} \qquad \Rightarrow \qquad k_y = 29.9\ \text{mm}$$

(c) $I_{x1} = \frac{1}{3}(60\ \text{mm})(45\ \text{mm})^3 = 1{,}822{,}500\ \text{mm}^4$

$I_{x2} = \frac{1}{36}(30\ \text{mm})(15\ \text{mm})^3 + (225\ \text{mm}^2)(40\ \text{mm})^2$

$= 2{,}812.5 + 360{,}000\ \ \text{mm}^4 = 362{,}812\ \text{mm}^4$

$I_{x3} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{4}(30\ \text{mm})^4 = 159{,}043\ \text{mm}^4$

$I_x = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3} = 1{,}822{,}500 - 362{,}812 - 159{,}043\ \text{mm}^4 = 1{,}300{,}644\ \text{m}^4$

$\Rightarrow \qquad I_x = 1.301\times10^6\ \text{mm}^4$

$J_O = I_x + I_y = (1.301 + 1.579)\times10^6\ \text{mm}^4 = 2.880\times10^6\ \text{mm}^4$

$\Rightarrow \qquad J_O = 2.88\times10^6\ \text{mm}^4$

5. (a) ① 반원기둥, $m_1 = \rho_A V_1 = \rho_A \left(\frac{1}{2}\pi a^2 h\right) = \frac{1}{2}\pi a^2 h \rho_A$, $\bar{z} = -\frac{4}{3\pi}a$

② 반원뿔, $m_2 = \rho_S V_2 = \rho_S \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\pi a^2 h\right) = \frac{1}{6}\pi a^2 h \rho_S$, $\bar{z} = \frac{1}{\pi}a$

$$\Sigma m = \frac{1}{2}\pi a^2 h \rho_A + \frac{1}{6}\pi a^2 h \rho_S = \frac{1}{6}\pi a^2 h(3\rho_A + \rho_S)$$

$$\Sigma(\bar{z}m) = -\frac{4}{3\pi}a\left(\frac{1}{2}\pi a^2 h \rho_A\right) + \frac{1}{\pi}a\left(\frac{1}{6}\pi a^2 h \rho_S\right) = \frac{1}{6}a^3 h(-4\rho_A + \rho_S)$$

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma(\bar{z}m)}{\Sigma m} = \frac{\frac{1}{6}a^3 h(-4\rho_A + \rho_S)}{\frac{1}{6}\pi a^2 h(3\rho_A + \rho_S)} = \frac{a(-4\rho_A + \rho_S)}{\pi(3\rho_A + \rho_S)} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z} = \frac{a(-4\rho_A + \rho_S)}{\pi(3\rho_A + \rho_S)}$$

(b) $I_{y1} = \frac{1}{2}m_1 a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi a^2 h \rho_A\right)a^2 = \frac{1}{4}\pi a^4 h \rho_A$

$$I_{y2} = \frac{3}{10}m_2 a^2 = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{6}\pi a^2 h \rho_S\right)a^2 = \frac{1}{20}\pi a^4 h \rho_S$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = \frac{1}{4}\pi a^4 h \rho_A + \frac{1}{20}\pi a^4 h \rho_S = \frac{1}{20}\pi a^4 h(5\rho_A + \rho_S)$$

$$\Rightarrow \quad I_y = \frac{1}{20}\pi a^4 h(5\rho_A + \rho_S)$$

(c) $\bar{I}_{z''1} = \frac{1}{4}m_1 a^2 + \frac{1}{12}m_1 h^2$

$$I_{z'1} = \bar{I}_{z''1} + m_1\left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}m_1 a^2 + \frac{1}{12}m_1 h^2 + m_1\left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{1}{48}m_1(12a^2 + 7h^2)$$

$$I_{z'2} = \frac{3}{20}m_2\left(a^2 + \frac{1}{4}h^2\right) = \frac{3}{80}m_2(4a^2 + h^2)$$

$$I_{z'} = I_{z'1} + I_{z'2} = \frac{1}{48}\frac{1}{2}\pi a^2 h \rho_A(12a^2 + 7h^2) + \frac{3}{80}\frac{1}{6}\pi a^2 h \rho_S(4a^2 + h^2)$$

$$= \frac{1}{96}\pi a^2 h \rho_A(12a^2 + 7h^2) + \frac{1}{160}\pi a^2 h \rho_S(4a^2 + h^2)$$

$$= \frac{1}{480}\pi a^2 h\left[5\rho_A(12a^2 + 7h^2) + 3\rho_S(4a^2 + h^2)\right]$$

$$\Rightarrow \quad I_{z'} = \frac{1}{480}\pi a^2 h\left[5\rho_A(12a^2 + 7h^2) + 3\rho_S(4a^2 + h^2)\right]$$