정 역 학 2013년 학기말시험 (가반) [25점] 2013. 12. 11.

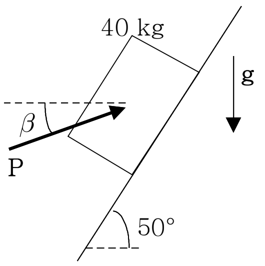
1.[3점] 다음 물음에 답하여라.

(a) x축과 y축으로 표현되는 수평면에 두께가 얇고 균일(uniform)하며 균질(homogeneous)인 평판이 놓여 있다. 면적이 A이고 도심(centroid)의 좌표가 $(\bar{x},\ \bar{y})$일 때, y축에 대한 면적 1차 모멘트 Q_y를 표현하는 식을 제시하고, y축에 대한 자중의 모멘트 M_y와 Q_y의 관계를 설명하여라.

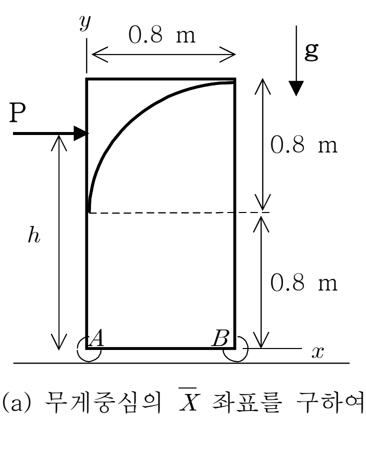
(b) 보(beam)의 순수굽힘(pure bending)에서, 면적 2차 모멘트, 즉 면적 관성모멘트(area moment of inertia)의 <u>의미</u>와 <u>용도</u>를 서술하여라.

(c) 강체(rigid body)의 질량 관성모멘트(mass moment of inertia)의 <u>의미</u>와 <u>용도</u>를 서술하여라.

2.[4점] The coefficients of friction between the block and the inclined surface are μ_s = 0.30 and μ_k = 0.25. The mass of the block is 40 kg and the inclination angle of the surface is 50°. In order to keep the block from moving down, a force P is exerted as shown. Draw a free-body diagram and determine the smallest magnitude of P required to maintain in equilibrium. (Hint: Use the angle of friction.)



3.[6점] 폭이 일정한 얇은 철판으로 제작된 캐비넷이 그림과 같다. 폭 방향은 xy면에 직각 방향이고, 두께는 균일(uniform)하며, 재질은 균질(homogeneous)이다. 바퀴는 회전하지 않도록 고정되어 있고 질량과 크기는 무시한다. 고정된 바퀴와 바닥면 사이의 정지마찰계수 μ_s는 0.30이고 운동마찰계수 μ_k는 0.25이다. 캐비넷 무게는 225 N이다.

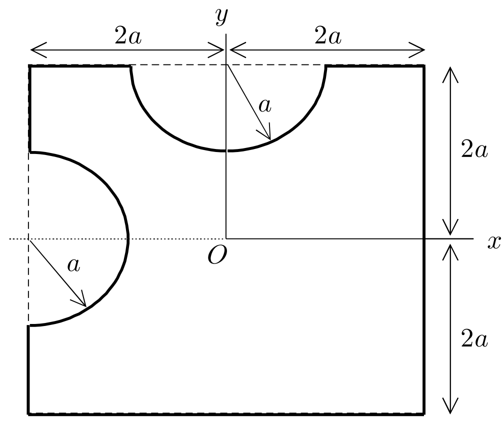


(a) 무게중심의 $\overline{X}$ 좌표를 구하여라.

(b) 정지해 있던 캐비넷에 수평방향 힘 P를 가하며 힘의 크기를 서서히 증가시킨다면, 캐비넷이 미끄러지려 할 때의 힘 P의 크기는 몇 N인가?

(c) (b)의 경우에 캐비넷이 미끄러지되 쓰러지지 않기 위한 h의 최대값은 몇 m인가?

[6점] 단면이 그림과 같은 beam이 있다. a=20mm이다.

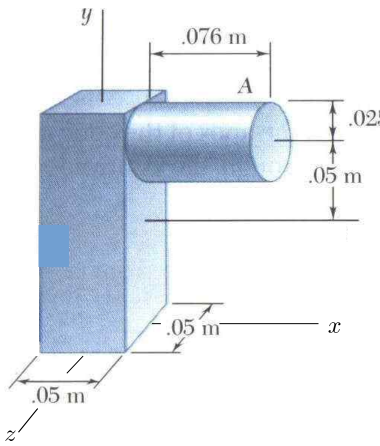


(a) 도심(centroid)의 좌표 $\overline{Y}$를 구하여라.

(b) 이 단면의 x축에 관한 면적 관성모멘트 I_x를 구하여라.

(c) 이 단면의 x축에 관한 회전반경(radius of gyration) k_x를 구하여라.

[6점] 그림과 같이 구조물이 사각기둥과 원기둥으로 이루어져 있다. 사각기둥 치수는 0.05m×0.05m×0.15m이다. 원기둥은 원의 반지름이 0.025m이고 길이가 0.076m이다. 재질은 균질(homogeneous)이고 밀도는 7500 kg/m^{3}이다.



(a) 무게중심의 $\overline{Y}$ 좌표를 구하여라.

(b) x축에 관한 질량 관성모멘트 I_x를 구하여라.

(c) y축에 관한 질량 관성모멘트 I_y를 구하여라.

정 역 학 　　　　　2013년 학기말시험 (가반) 해 답

1. (a) $Q_y = \bar{x}\,A$, 　$M_y = \bar{x}\;W = \bar{x}\,(\gamma\,t\,A) \propto \bar{x}\;A = Q_y$ 　(γ와 t가 상수이므로)

　　　　$\Rightarrow$ 자중의 모멘트 M_y와 면적 1차 모멘트 Q_y는 비례한다.

(b) 서술 [핵심어 : 굽힘 변형, $M \propto I$]

(c) 서술 [핵심어 : 회전 운동, $M \propto I$]

2. W = (40 kg)(9.81 m/s^2) = 392.4 N

μ_s = 0.30, 　μ_k = 0.25

$\Rightarrow$ 　$\phi_s = \tan^{-1}(0.30) = 16.70°$

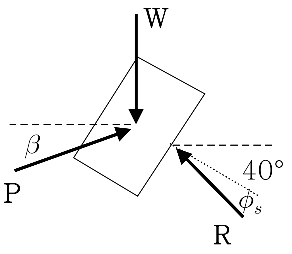
P의 크기가 최소

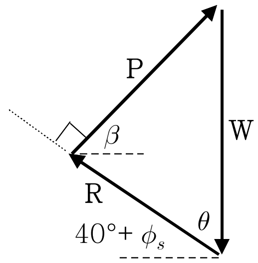
　　$\Rightarrow$ 　P $\perp$ R

$\beta = \theta = 90° - (40° + 16.70°) = 33.30°$

$P = W\sin\theta$

　= (392.4 N) sin33.30° = 215.4 N 　　$\Rightarrow$ 　　P = 215 N





3. μ_s = 0.30, 　μ_k = 0.25, 　W = 225 N, 　a = 0.8 m,

(a) 폭 일정, 두께 균일, 재질 균질 　$\Rightarrow$ 　무게중심 위치 = 도심 위치

$$\Sigma L = 6a + \frac{1}{4}(2\pi a) = \left(6 + \frac{\pi}{2}\right)a = 7.571\;a = 7.571\;(0.8\text{ m}) = 6.057\text{ m}$$

$$\Sigma(x\,L) = 2\left(\frac{a}{2}\right)(a) + (a)(2a) + \left(a - \frac{2a}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi a\right) = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)a^2 = 3.571\;(0.8\text{ m})^2 = 2.285\text{ m}^2$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(x\,L)}{\Sigma L} = \frac{\left(2+\frac{\pi}{2}\right)a^2}{\left(6+\frac{\pi}{2}\right)a} = 0.4717\;a = 0.4717\;(0.8\text{ m}) = 0.377\text{ m}$$

(b) $F_A = \mu_s\,N_A$, 　$F_B = \mu_s\,N_B$ 　　$(N_A \neq N_B)$

$\uparrow\Sigma F_y = 0;$ 　$N_A + N_B - W = 0$

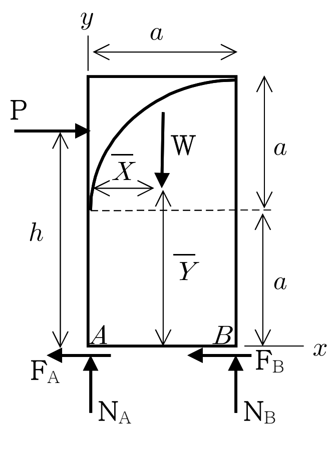
　　$\Rightarrow$ 　$N_A + N_B = W$

$\rightarrow\Sigma F_x = 0;$ 　$P - F_A - F_B = 0$

　　$\Rightarrow$ 　$P = F_A + F_B = \mu_s\,N_A + \mu_s\,N_B$

　　　　$= \mu_s\,(N_A + N_B) = \mu_s\;W$

　　　　= (0.30)(225 N) = 67.5 N



(c) 넘어지려는 순간 　$N_A = 0$, 　$F_A = 0$

$\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$

　　$h\;P - (a - \overline{X})\,W = 0$

　　$\Rightarrow$ 　$h = (a - \overline{X})\dfrac{W}{P}$ = (0.8−0.377 m)$\dfrac{225\text{ N}}{67.5\text{ N}}$ = 1.410 m 　　　$h_{\max}$ = 1.410 m

　　(또는 $h = (a - \overline{X})\dfrac{W}{P} = (a - \overline{X})\dfrac{W}{\mu_s\,W} = \dfrac{a - \overline{X}}{\mu_s} = \dfrac{0.8 - 0.377\text{ m}}{0.30}$ = 1.410 m)

4. a = 20 mm

(a) $\Sigma A = (4a)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\pi a^2\right) = (16-\pi)a^2$

$= 12.86\ a^2 = 12.86\ (20\ \text{mm})^2 = 5{,}144\ \text{mm}^2$

$\Sigma(yA) = (0)(4a)^2 + (0)\left(-\frac{1}{2}\pi a^2\right) + \left(2a - \frac{4}{3\pi}a\right)\left(-\frac{1}{2}\pi a^2\right) = -\left(\pi - \frac{2}{3}\right)a^3$

$= -2.475\ a^3 = -2.475\ (20\ \text{mm})^3 = -19{,}800\ \text{mm}^3$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma(yA)}{\Sigma A} = \frac{-\left(\pi - \frac{2}{3}\right)a^3}{(16-\pi)a^2} = -0.19248\ a = -0.19248\ (20\ \text{mm}) = -3.85\ \text{mm}$$

(b) $I_{x1} = \frac{1}{12}(4a)(4a)^3 = \frac{64}{3}a^4 = 21.333\ a^4 = 21.333\ (20\ \text{mm})^4 = 3.413\times10^6\ \text{mm}^4$

$I_{x2} = \frac{1}{8}\pi a^4 = 0.3927\ a^4 = 0.3927\ (20\ \text{mm})^4 = 62.832\times10^3\ \text{mm}^4$

$I_{x3} = \frac{1}{8}\pi a^4 - \left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)\left(\frac{4}{3\pi}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)\left(2a - \frac{4}{3\pi}a\right)^2$

$= \frac{1}{8}\pi a^4 + \left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)(4a^2) - \left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)\left(\frac{16}{3\pi}a^2\right) = \left(\frac{17}{8}\pi - \frac{8}{3}\right)a^4$

$= 4.009\ a^4 = 4.009\ (20\ \text{mm})^4 = 641.440\times10^3\ \text{mm}^4$

$I_x = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3} = \frac{64}{3}a^4 - \frac{1}{8}\pi a^4 - \left(\frac{17}{8}\pi - \frac{8}{3}\right)a^4 = \left(24 - \frac{9}{4}\pi\right)a^4 = 16.93\ a^4$

$= 16.93\ (20\ \text{mm})^4 = 2.71\times10^6\ \text{mm}^4$

(c) $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{16.93\ a^4}{12.86\ a^2}} = 1.147\ a = 1.147\ (20\ \text{mm}) = 22.9\ \text{mm}$

(또는 $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2.709\times10^6\ \text{mm}^4}{5.144\times10^3\ \text{mm}^2}} = 22.9\ \text{mm}$)

5. ① 직육면체, ② 원기둥

(a) ① $V_1 = abc = (0.05\text{ m})(0.05\text{ m})(0.15\text{ m}) = 0.3750\times10^{-3}\text{ m}^3$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(0.15\text{ m}) = 0.075\text{ m}$$

② $V_2 = \pi r^2 L = \pi(0.025\text{ m})^2\,(0.076\text{ m}) = 0.1492\times10^{-3}\text{ m}^3$

$$\bar{y} = 0.075 + 0.050\text{ m} = 0.125\text{ m}$$

$$\Sigma V = (0.3750 + 0.1492)\times10^{-3}\text{ m}^3 = 0.5242\times10^{-3}\text{ m}^3 = 524.2\times10^{-6}\text{ m}^3$$

$$\Sigma(\bar{y}V) = [(0.075)(0.375) + (0.125)(0.1492)]\times10^{-3}\text{ m}^4 = 46.78\times10^{-6}\text{ m}^4$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma(\bar{y}V)}{\Sigma V} = \frac{46.78\times10^{-6}\text{ m}^4}{524.2\times10^{-6}\text{ m}^3} = 0.0892\text{ m}$$

(b) $m_1 = \rho V_1 = (7{,}500\text{ kg/m}^3)\,(0.3750\times10^{-3}\text{ m}^3) = 2.8125\text{ kg}$

$$m_2 = \rho V_2 = (7{,}500\text{ kg/m}^3)\,(0.1492\times10^{-3}\text{ m}^3) = 1.1190\text{ kg}$$

$$I_{x1} = \frac{1}{12}m_1 b^2 + \frac{1}{3}m_1 c^2 = \frac{1}{12}m_1(b^2+4c^2) = \frac{1}{12}(2.8125\text{ kg})\,[(0.05\text{ m})^2 + 4(0.15\text{m})^2]$$
$$= 21.68\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

$$I_{x2} = \frac{1}{2}m_2 r^2 + m_2 d_x^2 = m_2\left(\frac{1}{2}r^2 + d_x^2\right) = (1.1190\text{ kg})\,[\frac{1}{2}(0.025\text{ m})^2 + (0.125\text{ m})^2]$$
$$= 17.83\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = (21.68 + 17.83)\times10^{-3}\text{ kg·m}^2 = 39.51\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

$$\Rightarrow \quad I_x = 39.5\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

(c) $I_{y1} = \frac{1}{12}m_1 a^2 + \frac{1}{12}m_1 b^2 = \frac{1}{12}m_1(a^2+b^2) = \frac{1}{12}(2.8125\text{ kg})\,[(0.05\text{ m})^2 + (0.05\text{m})^2]$

$$= 1.1719\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

$$I_{y2} = [\frac{1}{12}m_2 L^2 + \frac{1}{4}m_2 r^2] + m_2 d_y^2 = m_2\left(\frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{4}r^2 + d_y^2\right)$$

$$= (1.1190\text{ kg})\,[\frac{1}{12}(0.076\text{ m})^2 + \frac{1}{4}(0.025\text{ m})^2 + (0.025 + 0.038\text{ m})^2]$$

$$= 5.1548\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = (1.1719 + 5.1548)\times10^{-3}\text{ kg·m}^2 = 6.3267\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$

$$\Rightarrow \quad I_y = 6.33\times10^{-3}\text{ kg·m}^2$$