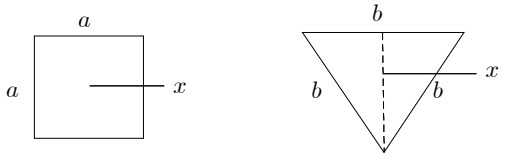
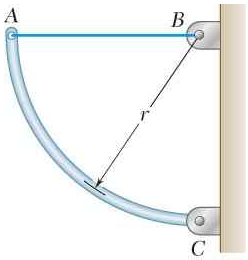
정 역 학 2012년 학기말시험 (가반/나반) [25점] 2012. 12. 13.

1.[3점] 펜싱 경기에서 종목에 따라 사용되는 칼이 다르다. 사브르(Sabre) 칼의 단면을 정사각형으로 간주하고, 에페(Epee) 칼의 단면을 정삼각형으로 간주할 때, 어느 칼이 휘어지기 어려운지를 면적 관성모멘트 $\bar{I}_x$를 계산하여 비교하여라. ($b = 2a/3^{1/4}$일 때 단면적이 같음.)



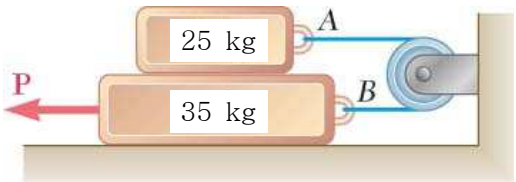
2.[4점] 무게가 50 N이고 굵기가 일정한 강재 봉AC가 반경(radius) 0.2 m 인 원호 형상으로 A에서 수평 줄에 매여 있고 C에서 힌지(hinge)되어 있다.



(a) 무게 중심 위치를 구한 후, 봉 AC의 자유물체도(free-body diagram)를 그림 오른쪽 여백에 그려라.

(b) 줄 AB에 걸리는 장력은 몇 N인가?

3.[6점] The coefficients of friction are μ_s = 0.40 and μ_k = 0.30 between all surfaces of contact. (The pulley is frictionless.)

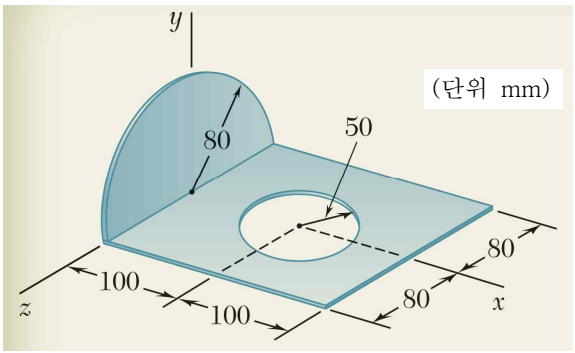


(a) If the cable AB is removed, determine the smallest force P required to start the blocks moving together.

(b) If the cable AB is attached as shown, determine the tension T_{AB} when the motion of each block is impending.

(c) If the cable AB is attached as shown, determine the smallest force P required to start the 35-kg block moving. (Use the result of (b).)

4.[6점] 얇은 철판이 그림과 같은 형상으로 성형되어 있다.

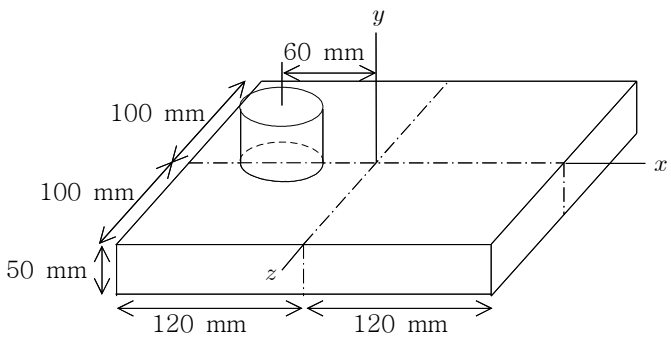


(a) 도심(centroid)의 좌표 $\bar{Y}$를 구하여라.

(b) z축에 관한 면적 관성모멘트 I_z^{area}를 구하여라.

(c) 철판의 두께가 4 mm이고 밀도가 7,500 kg/m^3 이라고 할 때, y축에 관한 질량 관성모멘트 I_y^{mass}를 구하여라.

5.[6점] 그림과 같이 균질(homogeneous) 알루미늄으로 제작된 기계요소가 있다. 직육면체 형상의 판 위에 원기둥이 붙어 있다. 원기둥에서 원의 반지름은 30 mm이고 기둥 높이는 판의 두께와 같다. (알루미늄의 밀도는 2,700 kg/m^3)



(a) 입체 도심(centroid)의 좌표 $\bar{X}$를 구하여라.

(b) y축에 관한 질량 관성모멘트 I_y를 구하여라.

(c) z축에 관한 질량 관성모멘트 I_z를 구하여라.

정 역 학　　2012년 학기말시험 (가반/나반) 해 답

1. Sabre 칼 단면 : 면적 = a^2　　$\bar{I}_x = \frac{1}{12}(a)(a)^3 = \frac{1}{12}a^4 = 0.0833\ a^4$

Epee 칼 단면 : 높이 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, 면적 $A = \frac{1}{2}(b)(\frac{\sqrt{3}}{2}b) = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = a^2$ ⇒ $b = \frac{2}{3^{1/4}}a$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{36}b\,h^3 = \frac{1}{36}b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{96}b^4 = \frac{\sqrt{3}}{96}\left(\frac{16}{3}a^4\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}a^4 = 0.0962\ a^4$$

같은 단면적일 때 Epee 칼 단면의 면적 관성모멘트가 더 크므로, Epee 칼이 더 휘어지기 어렵다.

2. W = 50 N, r = 0.20 m

(a) $\bar{r} = \frac{2}{\pi}r = \frac{2}{\pi}(0.20\ \text{m}) = 0.1273\ \text{m}$,

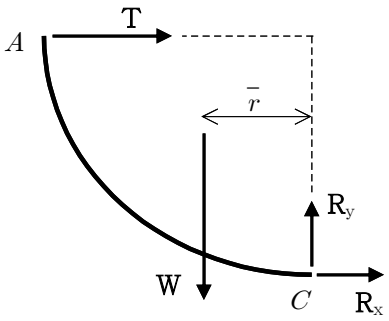
(b) $\circlearrowleft\Sigma M_C = 0$; $-T\,r + W\,\bar{r} = 0$

⇒ $T = \frac{\bar{r}}{r}W = \frac{\frac{2}{\pi}r}{r}W = \frac{2}{\pi}W$

$= \frac{2}{\pi}(50\ \text{N}) = 31.83\ \text{N}$

⇒ T = 31.8 N

FBD



3. W_1 = (25 kg)(9.81 m/s^2) = 245.25 N

W_2 = (35 kg)(9.81 m/s^2) = 343.35 N

(a) $\uparrow\Sigma F_y = 0$; $N - (W_1 + W_2) = 0$

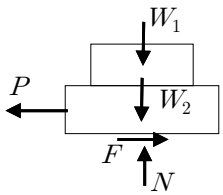
⇒ $N = W_1 + W_2 = (245.25\ \text{N}) + (343.35\ \text{N})$

$= 588.6\ \text{N}$

$\rightarrow\Sigma F_x = 0$; $F - P = 0$

⇒ $P = F = \mu_s N = (0.40)(588.6\ \text{N}) = 235.4\ \text{N}$

⇒ P = 235 N←



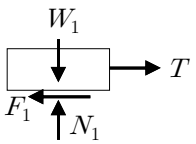
(b) 위 블럭

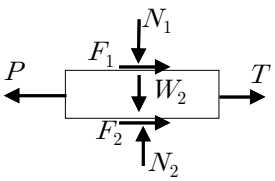
$\uparrow\Sigma F_y = 0$; $N_1 - W_1 = 0$ ⇒ $N_1 = W_1 = 245.25\ \text{N}$

$F_1 = \mu_s N_1 = (0.40)(245.25\ \text{N}) = 98.1\ \text{N}$

$\rightarrow\Sigma F_x = 0$; $T - F_1 = 0$

⇒ $T = F_1 = 98.1\ \text{N}$ ⇒ $T_{AB} = 98.1\ \text{N}$





(c) 아래 블럭

$\uparrow\Sigma F_y = 0$; $N_2 - N_1 - W_2 = 0$

⇒ $N_2 = N_1 + W_2 = (245.25\ \text{N}) + (343.35\ \text{N}) = 588.6\ \text{N}$

$F_2 = \mu_s N_2 = (0.40)(588.6\ \text{N}) = 235.44\ \text{N}$

$\rightarrow\Sigma F_x = 0$; $T + F_1 + F_2 - P = 0$

⇒ $P = T + F_1 + F_2 = (98.1\ \text{N}) + (98.1\ \text{N}) + (235.44\ \text{N}) = 431.6\ \text{N}$

⇒ P = 432 N←

4. (a) ① 사각 판

A = (200 mm)(160 mm) = 32,000 mm^2 , $\bar{y}$ = 0

② 원판 구멍

A = $-\pi$ (50 mm)^2 = −7,854 mm^2 , $\bar{y}$ = 0

③ 반원 판

A = $\frac{1}{2}\pi$ (80 mm)^2 = 10,053 mm^2 , $\bar{y}$ = $\frac{4}{3\pi}$(80 mm) = 33.95 mm

ΣA = 32,000 + (−7,854) + 10,053 (mm^2) = 34,199 mm^2

$\Sigma(\bar{y}A)$ = (0)(32,000) + (0)(−7,854) + (33.95)(10,053) = 341,299 mm^3

$\overline{Y} = \frac{\Sigma(\bar{y}A)}{\Sigma A} = \frac{341{,}299\,\text{mm}^3}{34{,}199\,\text{mm}^2}$ = 9.980 mm ⇒ $\overline{Y}$ = 9.98 mm

(b) $I_{z1}^a = \frac{1}{3}$(160 mm)(200 mm)^3 = 426.7×10^6 mm^4

$I_{z2}^a = \bar{I}_{z2}^a + A_2 d^2 = \frac{1}{4}\pi$(50 mm)^4 + (7,854 mm^2)(100 mm)^2 = 83.23×10^6 mm^4

$I_{z3}^a = \frac{1}{8}\pi$(80 mm)^4 = 16.08×10^6 mm^4

$I_z^{area} = I_{z1}^a - I_{z2}^a + I_{z3}^a$ = (426.7 − 83.23 + 16.08)×10^6 mm^4 = 359.6×10^6 mm^4

⇒ I_z^{area} = 360×10^6 mm^4 = 360×10^{-6} m^4

(c) t = 4 mm, ρ = 7,500 kg/m^3

$m_1 = \rho t A_1$ = (7,500 kg/m^3)(0.004 m)(32,000×10^{-6} m^2) = 0.960 kg

$I_{y1}^m = \bar{I}_{y1}^m + m_1 d^2 = \frac{1}{12}$(0.96 kg)[(200 mm)^2 + (160 mm)^2] + (0.96 kg)(100 mm)^2

= 14,848 kg·mm^2

$m_2 = \rho t A_2$ = (7,500 kg/m^3)(0.004 m)(7,854×10^{-6} m^2) = 0.2356 kg

$I_{y2}^m = \bar{I}_{y2}^m + m_2 d^2 = \frac{1}{2}$(0.2356 kg)(50 mm)^2 + (0.2356 kg)(100 mm)^2 = 2,651 kg·mm^2

$m_3 = \rho t A_3$ = (7,500 kg/m^3)(0.004 m)(10,053×10^{-6} m^2) = 0.3016 kg (반원판 질량)

$I_{y3}^m = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}mr^2) = \frac{1}{4}m_3 r^2 = \frac{1}{4}$(0.3016 kg)(80 mm)^2 = 482.5 kg·mm^2 ($m = 2m_3$ 원판 질량)

(다른 방법: $I_{y3}^m = \rho t I_{y3}^a$ = (7,500 kg/m^3 × 10^{-9} mm^3/m^3)(4 mm) $\frac{1}{8}\pi$(80 mm)^4 = 482.5 kg·mm^2)

$I_y^{mass} = I_{y1}^m - I_{y2}^m + I_{y3}^m$ = (14,848 − 2,651 + 482.5) kg·mm^2 = 12,680 kg·mm^2

⇒ I_y^{mass} = 12,680 kg·mm^2 = 12.68×10^{-3} kg·m^2

5. r = 30 mm, h = 50 mm, ρ = 2,700 kg/m^3

① 직육면체, ② 원 기둥

(a) $V_1 = abc$ = (240 mm)(200 mm)(50 mm) = 2.40×10^6 mm^3 , $\bar{x}$ = 0

$V_2 = \pi r^2 h = \pi$ (30 mm)^2 (50 mm) = 0.1414×10^6 mm^3 , $\bar{x}$ = −60 mm

$\Sigma V = V_1 + V_2$ = (2.40+ 0.1414)×10^6 mm^3 = 2.541×10^6 mm^3

$\Sigma(\bar{x} V)$ = [(0)(2.40) + (−60)(0.1414)] ×10^6 mm^4 = −8.484×10^6 mm^4

$$\bar{X} = \frac{\Sigma(\bar{x} V)}{\Sigma V} = \frac{-8.484\times10^6 \text{ mm}^4}{2.541\times10^6 \text{ mm}^3} = -3.339 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \bar{X} = -3.34 \text{ mm}$$

(b) $m_1 = \rho V_1$ = (2,700 kg/m^3)(2.40×10^{-3} m^3) = 6.48 kg

$m_2 = \rho V_2$ = (2,700 kg/m^3)(0.1414×10^{-3} m^3) = 0.3818 kg

$$I_{y1} = \frac{1}{12} m_1 a^2 + \frac{1}{12} m_1 b^2 = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2)$$

$$= \frac{1}{12}(6.48 \text{ kg})[(0.240 \text{ m})^2 + (0.200 \text{ m})^2] = 52.70\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$$

$$I_{y2} = \frac{1}{2} m_2 r^2 + m_2 d_1^2 = (0.3818 \text{ kg}) [\frac{1}{2}(0.030 \text{ m})^2 + (0.060 \text{ m})^2] = 1.5463\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$$

$I_y = I_{y1} + I_{y2}$ = (52.70+ 1.5463)×10^{-3} kg·m^2 = 54.246×10^{-3} kg·m^2

$\Rightarrow \quad I_y$ = 54.2×10^{-3} kg·m^2

(c) $$I_{z1} = \frac{1}{12} m_1 a^2 + \frac{1}{3} m_1 c^2 = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + 4c^2)$$

$$= \frac{1}{12}(6.48 \text{ kg})[(0.240 \text{ m})^2 + 4\ (0.050 \text{ m})^2] = 36.50\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$$

$$I_{z2} = [\frac{1}{4} m_2 r^2 + \frac{1}{12} m_2 h^2] + m_2 d_2^2$$

$$= (0.3818 \text{ kg}) \{[\frac{1}{4}(0.030 \text{ m})^2 + \frac{1}{12}(0.050 \text{ m})^2] + [(0.025 \text{ m})^2 + (0.060 \text{ m})^2]\}$$

$$= (0.3818 \text{ kg})\ (4.658\times10^{-3} \text{ m}^2) = 1.7786\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$$

$I_z = I_{z1} + I_{z2}$

= (36.50 + 1.7786)×10^{-3} kg·m^2 = 38.28×10^{-3} kg·m^2

$\Rightarrow \quad I_z$ = 38.3×10^{-3} kg·m^2