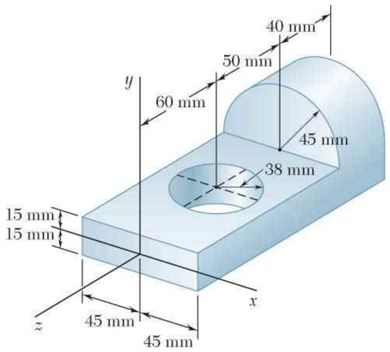
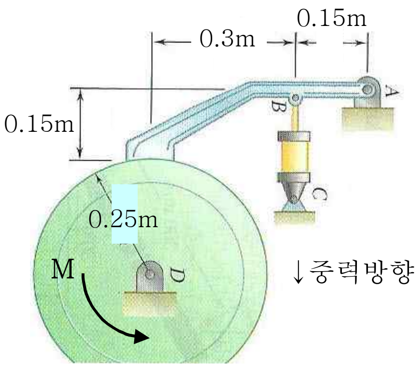
정 역 학　　2011년 학기말시험 (가반) [25점]　　2011. 12. 15.

1.[2점] 야구 경기에서, 타자에 따라 방망이(bat)를 잡는 위치가 다르다. ‘방망이를 짧게 잡는다’는 것은 방망이의 끝을 조금 남기고 잡는 것을 의미한다. 이것은 방망이의 끝을 잡는 것에 비해서 어떤 장점이 있는지를 질량 관성모멘트 관점에서 설명하여라.

2.[5점] Determine the location of the center of gravity of the homogeneous steel machine element shown.



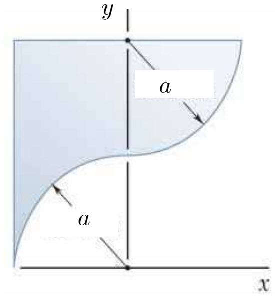
3.[6점] 크기가 250 N·m인 우력 모멘트 M이 드럼에 가해지고 있다. 유압실린더 C가 브레이크 레버의 B 지점을 당기는 힘 P를 가하고 있다. 브레이크 레버의 무게는 무시할 만하다. 브레이크와 드럼 사이의 정지 마찰계수는 0.40이고 운동마찰계수는 0.30이다.



(a) 드럼의 자유물체도와 브레이크 레버의 자유물체도 (free-body diagram)를 각각 그려라. (치수 생략)

(b) 드럼과 브레이크 사이의 마찰에 의해서 드럼이 회전하지 않도록 하기 위한 힘 P의 크기의 범위를 구하여라.

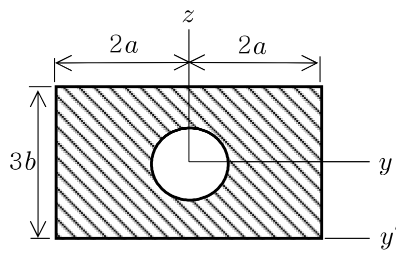
4.[6점] 그림과 같이 직사각형($a\times 2a$) 한 쪽에서 1/4 원을 떼어내어 다른 쪽에 이어 붙인 도형이 있다.



(a) x축에 대한 면적 관성모멘트(area moment of inertia) I_x를 구하라.

(b) 굵기가 균일한 철사로 도형의 테두리를 따라 울타리를 만들 때, 철사 울타리의 도심을 구하여라.

5.[6점] 두께가 얇고 균일하며 균질인 평판에서 그림과 같이 속이 빈 원판을 잘라냈다. 원의 반지름은 $2c$이고, 남은 판의 질량은 m이다.



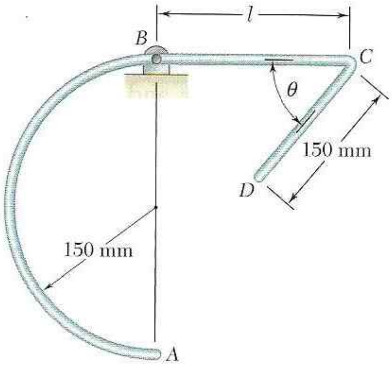
(a) 도심을 지나는 y축에 대한 질량 관성모멘트(mass moment of inertia) I_y를 구하고, 판에 수직이며 도심을 지나는 x축(도시되지 않음)에 대한 질량 관성모멘트 I_x를 구하라.

(b) 사각형의 밑변 y'축에 대한 질량 관성모멘트 $I_{y'}$을 구하라.

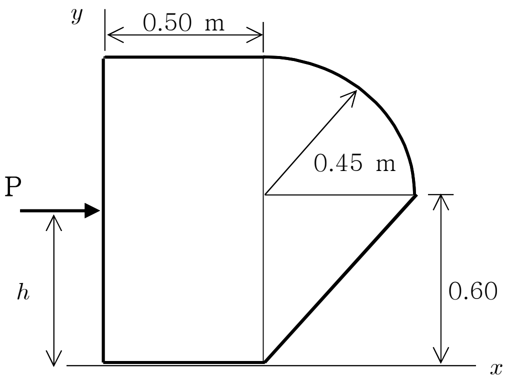
정 역 학 2011년 학기말시험 (나반) [25점] 2011. 12. 14.

1.[2점] 자동화된 생산라인에서 제품 이송에 사용하는 경사진 컨베이어 벨트가 있다. 컨베이어 설계자의 관점에서, 경사각을 선정할 때 고려할 사항을 서술하여라.('마찰각'이라는 용어를 사용해야 함.)

2.[5점] The homogeneous wire $ABCD$ is bent as shown and is supported by a pin at B. Knowing that l = 200 mm, determine the angle θ for which the centroid is located on the line AB.



3.[6점] 그림과 같은 복합 면으로 구성된 평판이 바닥에 세워져 있다. 이 평판은 두께가 균일하고 비중이 균질하다. 판 전체의 무게가 20 N이고, 판과 바닥면 사이의 정지마찰계수는 0.30, 운동마찰계수는 0.25이다.

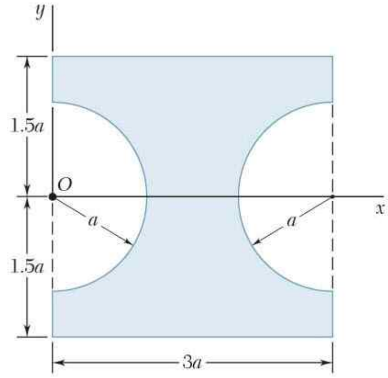


(a) 도심의 $\overline{X}$ 좌표를 구하여라.

(b) 판이 미끄러지지 않고 정지해 있기 위한 힘 P의 범위를 구하여라.

(c) 힘 P의 크기가 8.0 N 일 때, 평판이 미끄러지되 쓰러지지 않기 위한 h의 최대값을 구하여라.

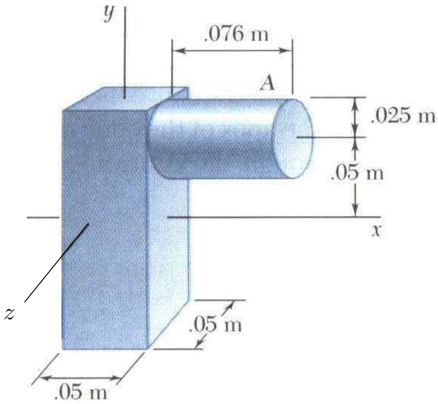
4.[6점] 단면이 그림과 같은 beam이 있다. a=20mm 이다.



(a) 이 단면의 x축에 대한 면적 관성모멘트(area moment of inertia) I_x를 구하고, x축에 대한 회전반경(radius of gyration) k_x를 구하여라.

(b) 이 단면의 y축에 대한 면적 관성모멘트 I_y를 구하여라

5.[6점] 그림과 같이 구조물이 사각기둥(0.05×0.05×0.15 m)과 원기둥(반지름 0.025m, 길이 0.076 m)으로 이루어져 있다. 재질의 밀도 ρ는 7500 kg/m^{3}이다.



(a) 무게 중심의 $\overline{X}$ 좌표를 구하여라.

(b) x축에 대한 질량 관성모멘트(mass moment of inertia) I_x를 구하여라.

(c) y축에 대한 질량 관성모멘트 I_y를 구하여라.

정 역 학　　　　2011년 학기말시험 (가반) 해 답

1. 방망이의 단면이 균일한 경우에, 끝을 잡고 회전시킬 때 질량 관성모멘트 I는 $\frac{1}{3}mL^2$이고, 가운데를 잡고 회전시킬 때 I는 $\frac{1}{12}mL^2$이다. 짧게 잡으면 I값이 작아진다. 힘의 모멘트 $M = I\alpha$이므로, 모멘트 M이 일정할 때 I가 작을수록 각가속도 α가 커진다. 즉 방망이를 휘두르기 쉬워진다.

2. $x = 0$ 인 면에 대칭 $\Rightarrow$ $\overline{X} = 0$

① 직육면체

$V = (60+50+40 \text{ mm})(45+45 \text{ mm})(15+15 \text{ mm}) = 405{,}000 \text{ mm}^3$

$\overline{y} = 0$,　$\overline{z} = -\frac{1}{2}(150 \text{ mm}) = -75 \text{ mm}$

② 반원기둥

$V = \frac{1}{2}\pi(45 \text{ mm})^2 (40 \text{ mm}) = 127{,}234 \text{ mm}^3$

$\overline{y} = (15 \text{ mm}) + \frac{4}{3\pi}(45 \text{ mm}) = 34.10 \text{ mm}$,　$\overline{z} = -(110 \text{ mm}) - \frac{1}{2}(40 \text{ mm}) = -130 \text{ mm}$

③ 원기둥 구멍

$V = -\pi(38 \text{ mm})^2 (30 \text{ mm}) = -136{,}094 \text{ mm}^3$,　$\overline{y} = 0$,　$\overline{z} = -60 \text{ mm}$

$\Sigma V = 405{,}000 + 127{,}234 + (-136{,}094) \text{ mm}^3 = 396{,}140 \text{ mm}^3$

$\Sigma(\overline{y}V) = (0)(405{,}000) + (34.10)(127{,}234) + (0)(-136{,}094) \text{ mm}^4 = 4{,}338{,}679 \text{ mm}^4$

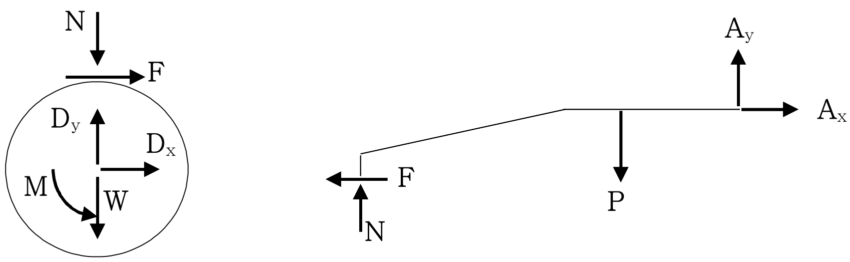
$\Sigma(\overline{z}V) = (-75)(405{,}000) + (-130)(127{,}234) + (-60)(-136{,}094) \text{ mm}^4 = -38{,}749{,}780 \text{ mm}^4$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma(\overline{y}V)}{\Sigma V} = \frac{4{,}338{,}679 \text{ mm}^4}{396{,}140 \text{ mm}^3} = 10.952 \text{ mm}$$

$$\overline{Z} = \frac{\Sigma(\overline{z}V)}{\Sigma V} = \frac{-38{,}749{,}780 \text{ mm}^4}{396{,}140 \text{ mm}^3} = -97.81 \text{ mm}$$

$\Rightarrow$ center of gravity = centroid = (0, 10.95 mm, -97.8 mm)

3. (a)



(b) $\mu_s = 0.40$,　$\mu_k = 0.30$,　$M = 250$ N·m,　정지상태 $F \le \mu_s N$ $\left(N \ge \frac{F}{\mu_s}\right)$

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$; $M - (0.250 \text{ m})\, F = 0$ $\Rightarrow$ $F = \frac{M}{0.250 \text{ m}} = \frac{250 \text{ N}\cdot\text{m}}{0.250 \text{ m}} = 1{,}000 \text{ N}$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$; $(0.150 \text{ m})\, P - (0.150 \text{ m})\, F - (0.450 \text{ m})\, N = 0$

$$\Rightarrow \quad P = F + 3\,N \ge F + 3\,\frac{F}{\mu_s} = \left(1 + \frac{3}{\mu_s}\right)F = \left(1 + \frac{3}{0.40}\right)(1000 \text{ N}) = 8{,}500 \text{ N}$$

$\Rightarrow$ $P \ge 8{,}500$ N　(또는 $P \ge 8.50$ kN)

4. (a) ① $a \times 2a$ 직사각형, ② 왼쪽 1/4원 구멍, ③ 오른쪽 1/4원

① $I_{x1} = \frac{1}{3}(a)(2a)^3 = \frac{8}{3}a^4 = 2.667\ a^4$

② $I_{x2} = \frac{1}{16}\pi a^4 = 0.1963\ a^4$

③ $I_{x3} = \left[\frac{\pi}{16}a^4 - \frac{\pi}{4}a^2\left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2\right] + \frac{\pi}{4}a^2\left(2a - \frac{4a}{3\pi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} + \pi - \frac{4}{3} + \frac{4}{9\pi}\right)a^4 = 2.004\ a^4$

$I_x = I_{x1} - I_{x2} + I_{x3} = (2.667 - 0.1963 + 2.004)\ a^4 = 4.475\ a^4 \qquad \Rightarrow \qquad I_x = 4.48\ a^4$

(b) ① 위 수평선 $L = 2a, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 2a$

② 왼쪽 수직선 $L = 2a, \quad \bar{x} = -a, \quad \bar{y} = a$

③ 왼쪽 1/4원호 $L = \frac{1}{4}(2\pi a) = \frac{\pi}{2}a = 1.5708\ a,$

$\bar{x} = -\frac{2}{\pi}a = -0.6366\ a, \quad \bar{y} = \frac{2}{\pi}a = 0.6366\ a$

④ 오른쪽 1/4원호 $L = 1.5708\ a, \quad \bar{x} = 0.6366\ a, \quad \bar{y} = 2a - 0.6366\ a = 1.3634\ a$

$\Sigma L = 2a + 2a + 1.5708\ a + 1.5708\ a = 7.1416\ a$

$\Sigma(\bar{x}L) = (0)(2a) + (-a)(2a) + (-0.6366\ a)(1.5708\ a) + (0.6366\ a)(1.5708\ a) = -2a^2$

$\Sigma(\bar{y}A) = (2a)(2a) + (a)(2a) + (0.6366\ a)(1.5708\ a) + (1.3634\ a)(1.5708\ a) = 9.1416a^2$

$\bar{X} = \frac{\Sigma(\bar{x}L)}{\Sigma L} = \frac{-2a^2}{7.1416\,a} = -0.2800\ a$

$\bar{Y} = \frac{\Sigma(\bar{y}L)}{\Sigma L} = \frac{9.1416a^2}{7.1416\,a} = 1.2800\ a \quad \Rightarrow \quad$ centroid = $(-0.280\ a,\ 1.2800\ a)$

<다른 방법> ③과 ④를 함께. $L = \pi a, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = a$

5. (a) $A = (4a)(3b) - \pi(2c)^2 = 12ab - 4\pi c^2, \quad m = \rho t A$

$\Rightarrow \quad \rho t = \frac{m}{A} = \frac{m}{12ab - 4\pi c^2} \quad \Rightarrow \quad I = \rho t\ I^{area} = \frac{m}{4(3ab - \pi c^2)} I^{area}$

$I_y^{area} = \frac{1}{12}(4a)(3b)^3 - \frac{1}{4}\pi(2c)^4 = 9ab^3 - 4\pi c^4 \quad \Rightarrow \quad I_y = m\frac{9ab^3 - 4\pi c^4}{4(3ab - \pi c^2)}$

$I_z^{area} = \frac{1}{12}(3b)(4a)^3 - \frac{1}{4}\pi(2c)^4 = 16a^3b - 4\pi c^4 \quad \Rightarrow \quad I_z = m\frac{16a^3b - 4\pi c^4}{4(3ab - \pi c^2)}$

$I_x = I_y + I_z = m\frac{9ab^3 - 4\pi c^4}{4(3ab - \pi c^2)} + m\frac{16a^3b - 4\pi c^4}{4(3ab - \pi c^2)} = m\frac{ab(16a^2 + 9b^2) - 8\pi c^4}{4(3ab - \pi c^2)}$

(b) <방법1>

$I_{y'} = I_y + md^2 = m\frac{9ab^3 - 4\pi c^4}{4(3ab - \pi c^2)} + m\left(\frac{3}{2}b\right)^2 = m\frac{9ab^3 - 4\pi c^4 + 9b^2(3ab - \pi c^2)}{4(3ab - \pi c^2)}$

$= m\frac{36ab^3 - 4\pi c^4 - 9\pi b^2c^2}{4(3ab - \pi c^2)}$

<방법2>

$I_{y'1}^{area} = \frac{1}{3}(4a)(3b)^3 = 36ab^3$

$I_{y'2}^{area} = \frac{1}{4}\pi(2c)^4 + \pi(2c)^2\left(\frac{3}{2}b\right)^2 = 4\pi c^4 + 9\pi b^2c^2$

$I_{y'}^{area} = I_{y'1}^{area} - I_{y'2}^{area} = 36ab^3 - (4\pi c^4 + 9\pi b^2c^2)$

$I_{y'} = \frac{m}{4(3ab - \pi c^2)} I^{area} = m\frac{36ab^3 - 4\pi c^4 - 9\pi b^2c^2}{4(3ab - \pi c^2)}$

정 역 학 2011년 학기말시험 (나반) 해 답

1. 경사가 완만하면 특정 높이에 도달하기까지 거리가 길어야 한다. 경사가 급하면 물체의 무게의 경사면 방향 성분의 크기가 정지마찰력 최대값 보다 커져서 제품이 미끄러져 내려갈 수 있다. 최적의 경사각은 정지마찰각 ϕ_s에 가까운 것으로서, $\phi_s = \tan^{-1}\mu_s$ 이고, 여기서 μ_s는 정지마찰계수이다.

2. ① 반원호 $L = \pi$ (150 mm) = 471.2 mm, $\bar{x} = -\dfrac{2}{\pi}$ (150 mm) = -95.49 mm

② 수평선 L = 200 mm, $\bar{x} = \dfrac{1}{2}$ (200 mm) = 100 mm

③ 경사선 L = 150 mm, $\bar{x}$ = (200 mm) - $\dfrac{1}{2}$(150 mm) $\cos\theta$ = (200 - 75 $\cos\theta$) mm

$\bar{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}\Sigma L = \Sigma(\bar{x}L) = 0$

$\Sigma(\bar{x}L)$ = (−95.49 mm)(471.2 mm) + (100 mm)(200 mm) + [(200 - 75$\cos\theta$) mm](150 mm)

= -44,995 + 20,000 + (30,000 - 11,250 $\cos\theta$) mm^2 = 0

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0.4449 \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}(0.4449) = 63.58° \quad \Rightarrow \quad \theta = 63.6°$

3. W = 20 N, μ_s = 0.30, μ_k = 0.25

(a) ① 직사각형 A = (0.50 m)(0.45+0.60 m) = 0.525 m^2 , $\bar{x} = \dfrac{1}{2}$(0.50 m) = 0.250 m

② 삼각형 $A = \dfrac{1}{2}$(0.45 m)(0.60 m) = 0.1350 m^2 , $\bar{x}$ = (0.50 m) + $\dfrac{1}{3}$(0.45 m) = 0.650 m

③ 1/4 원 $A = \dfrac{1}{4}\pi$(0.45 m)^2 = 0.1590 m^2 , $\bar{x}$ = (0.50 m) + $\dfrac{4}{3\pi}$(0.45 m) = 0.6910 m

ΣA = 0.525 + 0.1350 + 0.1590 m^2 = 0.819 m^2

$\Sigma(\bar{x}A)$ = (0.250 m)(0.525) + (0.650 m)(0.1350) + (0.6910 m)(0.1590) m^3 = 0.3289 m^3

$$\bar{X} = \frac{\Sigma(\bar{x}A)}{\Sigma A} = \frac{0.3289 \text{ m}^3}{0.819 \text{ m}^2} = 0.4015 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \bar{X} = 0.402 \text{ m}$$

(b) $F \le \mu_s N$,

$\uparrow\Sigma F_y = 0$; $N - W = 0 \quad \Rightarrow \quad N = W$

$\rightarrow\Sigma F_x = 0$; $P - F = 0 \quad \Rightarrow \quad P = F \le \mu_s N = \mu_s W$ = (0.30) (20 N) = 6.00 N

$\Rightarrow \quad P \le 6.00$ N

(c) 넘어지려는 순간 $N_A = 0$, $F_A = 0$

$\circlearrowleft\Sigma M = 0$

$h\,P$ - [(0.50 m) - $\bar{x}$] W = 0

$$\Rightarrow \quad h = [(0.50 \text{ m}) - \bar{x}]\ \frac{W}{P} = (0.50-0.402 \text{ m})\ \frac{20 \text{ N}}{8 \text{ N}} = 0.245 \text{ m}$$

$\Rightarrow \quad h_{\max}$ = 0.245 m

4. (a) ① 정사각형, ② 왼쪽 반원, ③ 오른쪽 반원

① $I_{x1} = \frac{1}{12}(3a)(3a)^3 = \frac{27}{4}a^4 = 6.75\ (20\ \text{mm})^4 = 1{,}080{,}000\ \text{mm}^4$

② $I_{x2} = \frac{1}{8}\pi a^4 = 0.3927\ (20\ \text{mm})^4 = 62{,}832\ \text{mm}^4$

③ $I_{x3} = I_{x2} = 62{,}832\ \text{mm}^4$

$I_x = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3} = (1{,}080{,}000 - 2\times 62{,}832)\ \text{mm}^4 = 954{,}336\ \text{mm}^4$

$\Rightarrow \quad I_x = 954{,}000\ \text{mm}^4 = 0.954\times 10^6\ \text{mm}^4$

(또는 $I_x = (\frac{27}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8})\ a^4 = 5.964\ a^4 = 5.964\ (20\ \text{mm})^4 = 954{,}336\ \text{mm}^4$)

$A = (3a)^2 - \pi a^2 = (9-\pi)\ a^2 = 5.858\ (20\ \text{mm})^2 = 2{,}343\ \text{mm}^2$

$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{954{,}336\ \text{mm}^4}{2{,}343\ \text{mm}^2}} = 20.18\ \text{mm} \qquad \Rightarrow \qquad k_x = 20.2\ \text{mm}$

(또는 $k_x = \sqrt{\frac{5.964\ a^4}{(9-\pi)\ a^2}} = 1.009\ a = 1.009\ (20\ \text{mm}) = 20.2\ \text{mm}$)

(b) ① $I_{y1} = \frac{1}{3}(3a)(3a)^3 = 27\ a^4 = 27\ (20\ \text{mm})^4 = 4{,}320{,}000\ \text{mm}^4$

② $I_{y2} = \frac{\pi}{8}a^4 = 0.393\ a^4 = 0.393\ (20\ \text{mm})^4 = 62{,}880\ \text{mm}^4$

③ $I_{y3} = \left[\frac{\pi}{8}a^4 - \frac{\pi}{2}a^2\left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2\right] + \frac{\pi}{2}a^2\left(3a - \frac{4a}{3\pi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} + \frac{9\pi}{2} - 4 + \frac{8}{9\pi}\right)a^4 = 10.530\ a^4$

$I_y = I_{y1} - I_{y2} - I_{y3} = (27 - 0.393 - 10.530)\ a^4 = 16.077\ a^4 = 16.077\ (20\ \text{mm})^4 = 2{,}572{,}320\ \text{mm}^4$

$\Rightarrow \quad I_y = 2{,}570{,}000\ \text{mm}^4 = 2.57\times 10^6\ \text{mm}^4$

5. (a) ① 직육면체, ② 원기둥

① $V_1 = a\,b\,c = (0.05\ \text{m})(0.05\ \text{m})(0.15\ \text{m}) = 0.3750\times 10^{-3}\ \text{m}^3$, $\bar{x} = 0$

② $V_2 = \pi r^2 L = \pi(0.025\ \text{m})^2\ (0.076\ \text{m}) = 0.1492\times 10^{-3}\ \text{m}^3$, $\bar{x} = 0.025 + 0.038\ \text{m} = 0.063\ \text{m}$

$\Sigma V = (0.375 + 0.1492)\times 10^{-3}\ \text{m}^3 = 0.5242\times 10^{-3}\ \text{m}^3 = 524.2\times 10^{-6}\ \text{m}^3$

$\Sigma(\bar{x}V) = [(0)(0.375) + (0.063)(0.1492)]\times 10^{-3}\ \text{m}^4 = 9.3996\times 10^{-6}\ \text{m}^4$

$\overline{X} = \frac{\Sigma(\bar{x}V)}{\Sigma V} = \frac{9.3996\times 10^{-6}\ \text{m}^4}{524.2\times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 0.01793\ \text{m}$

(b) $m_1 = \rho V_1 = (7{,}500\ \text{kg/m}^3)\ (0.3750\times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2.8125\ \text{kg}$

$m_2 = \rho V_2 = (7{,}500\ \text{kg/m}^3)\ (0.1492\times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 1.1192\ \text{kg}$

$I_{x1} = \frac{1}{12}m_1 b^2 + \frac{1}{12}m_1 c^2 = \frac{1}{12}m_1(b^2 + c^2) = \frac{1}{12}(2.8125\ \text{kg})\ [(0.05\ \text{m})^2 + (0.15\text{m})^2]$

$= 5.8593\times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2$

$I_{x2} = \frac{1}{2}m_2 r^2 + m_2 d_x^2 = m_2\ (\frac{1}{2}r^2 + d_x^2) = (1.1192\ \text{kg})\ [\frac{1}{2}\ (0.025\ \text{m})^2 + (0.05\ \text{m})^2]$

$= 3.14775\times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2$

$I_x = I_{x1} + I_{x2} = (5.8593 + 3.14775)\times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2 = 9.007\times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2$

$\Rightarrow \quad I_x = 9.01\times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2$

(c) $I_{y1} = \frac{1}{12}m_1 a^2 + \frac{1}{12}m_1 b^2 = \frac{1}{12}m_1(a^2 + b^2) = \frac{1}{12}(2.8125 \text{ kg}) [(0.05 \text{ m})^2 + (0.05\text{m})^2]$

$= 1.1719\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$

$I_{y2} = [\frac{1}{12}m_2 L^2 + \frac{1}{4}m_2 r^2] + m_2 d_y^2 = m_2 (\frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{4}r^2 + d_y^2)$

$= (1.1192 \text{ kg}) [\frac{1}{12}(0.076 \text{ m})^2 + \frac{1}{4} (0.025 \text{ m})^2 + (0.025+0.038 \text{ m})^2]$

$= 5.1557\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$

$I_y = I_{y1} + I_{y2} = (1.1719 + 5.1557)\times10^{-3} \text{ kg·m}^2 = 6.3276\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$

$\Rightarrow \quad I_y = 6.33\times10^{-3} \text{ kg·m}^2$