

공학수학 보충문제 (제9,10장)

출처 : E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 8th ed., Wiley, 1999.

해답 : Kreyszig 공업수학 문제풀이 해답, 범한서적(주), 2001. [도서관5층 지정도서실]

9-1 함수의 직교성

■ 복습문제

직교성(orthogonality). 주어진 구간에서 직교성을 증명하라(과정을 자세히 보여라). 대응하는 함수의 정규직교집합을 구하라.

26. $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$ ($0 \leq x \leq \pi$)

27. $\sin \omega x, \sin 2\omega x, \sin 3\omega x, \dots$ ($-\pi/\omega \leq x \leq \pi/\omega$)

28. $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x$ ($-1 \leq x \leq 1$)

29. $1, \cos 4nx, \sin 4nx, \dots$ ($n = 1, 2, \dots$) ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$)

9-3 Sturm-Liouville 문제와 고유함수

■ 연습문제 4.7

Sturm-Liouville 문제. 다음 문제의 고유값과 고유함수를 구하라. 문제 3-6에서는 직접 계산하여 직교성을 증명하라.

3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

4. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

5. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

6. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$

■ 복습문제

고유값과 고유함수(eigenvalues and eigenfunctions). 다음 문제의 고유값과 고유함수를 구하라.

30. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

31. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2L), \quad y'(0) = y'(2L)$

32. $x^2 y'' - x y' + (\lambda^2 x^2 - 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

33. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi/2) = 0, \quad y(\pi/2) = 0$

9-5 Fourier 급수

■ 연습문제 10.1

기본주기, 최소의 양의 주기 p 를 구하라.

1. $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x$

2. $\cos nx, \sin nx, \cos \frac{2\pi x}{k}, \sin \frac{2\pi x}{k}, \cos \frac{2\pi nx}{k}, \sin \frac{2\pi nx}{k}$

2π 주기함수의 그래프

주기가 2π 이고 $-\pi < x < \pi$ 에서 다음 식으로 주어진 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려라.

7. $f(x) = x$

8. $f(x) = x^2$

9. $f(x) = |x|$

10. $f(x) = \pi - |x|$

11. $f(x) = |\sin x|$

12. $f(x) = e^{-|x|}$

13. $f(x) = \begin{cases} x & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ x^2 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} x & (-\pi < x < 0) \\ \pi - x & (0 < x < \pi) \end{cases}$

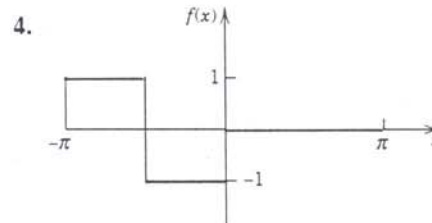
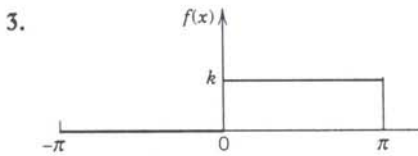
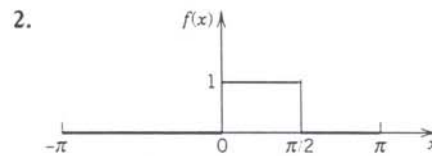
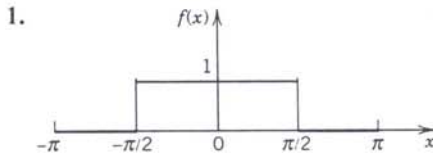
17. $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ e^{-x} & (0 < x < \pi) \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (-\pi < x < 0) \\ -x^2 & (0 < x < \pi) \end{cases}$

■ 연습문제 10.2

푸리에 급수

다음과 같이 주어지는 주기가 2π 인 함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수를 구하는 과정을 자세히 보이고, 처음 세 개의 부분함의 그래프를 정확하게 그려라.



5. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

6. $f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi)$

7. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$

8. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$

9. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$

10. $f(x) = x + |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

11. $f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi < x < 0) \\ -1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} -1 & (0 < x < \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 < x < 2\pi) \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ -1 & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} x & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ \pi - x & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} x & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ \pi^2/4 & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{cases}$

10-1 Fourier 급수

■ 연습문제 10.3

주기 $p = 2L$ 인 푸리에 급수

주기 $p = 2L$ 인 주기함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수를 구하고, $f(x)$ 및 처음 세 개의 부분합의 개형을 그려라(폴이과정을 자세히 보여라).

1. $f(x) = -1$ ($-1 < x < 0$), $f(x) = 1$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 2$

2. $f(x) = 1$ ($-1 < x < 0$), $f(x) = -1$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 2$

3. $f(x) = 0$ ($-2 < x < 0$), $f(x) = 2$ ($0 < x < 2$), $p = 2L = 4$

4. $f(x) = |x|$ ($-2 < x < 2$), $p = 2L = 4$

5. $f(x) = 2x$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$

6. $f(x) = 1 - x^2$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$

7. $f(x) = 3x^2$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$

8. $f(x) = \frac{1}{2} + x$ ($-\frac{1}{2} < x < 0$), $f(x) = \frac{1}{2} - x$ ($0 < x < \frac{1}{2}$), $p = 2L = 1$

9. $f(x) = 0$, ($-1 < x < 0$), $f(x) = x$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 2$

10. $f(x) = x$ ($0 < x < 1$), $f(x) = 1 - x$ ($1 < x < 2$), $p = 2L = 2$

11. $f(x) = \pi \sin \pi x$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 1$

12. $f(x) = \pi x^3/2$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$