

## 공 학 수 학 보충문제 (제4장)

출처 : E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 8th ed., Wiley, 1999.

해답 : Kreyszig 공업수학 문제풀이 해답, 범한서적(주), 2001. [도서관5층 지정도서실]

### 4-1 라플라스변환의 정의

#### ■ 연습문제 5.1

라플라스 변환. 다음 함수의 라플라스 변환을 구하라. 상세한 풀이과정을 보여라. ( $a, b, c, \omega, \delta$ 는 상수이다)

1.  $2t + 6$

2.  $a + bt + ct^2$

3.  $\sin \pi t$

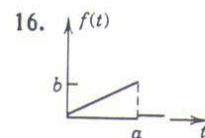
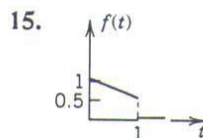
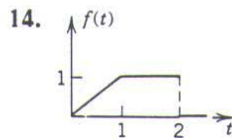
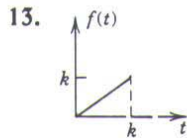
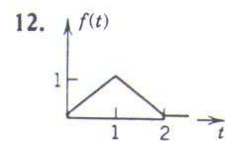
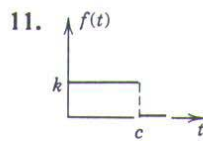
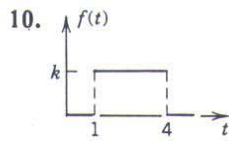
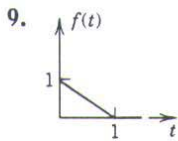
4.  $\cos^2 \omega t$

5.  $e^{a-bt}$

6.  $e^t \cosh 3t$

7.  $\sin(\omega t + \delta)$

8.  $\sin 2t \cos 2t$



역라플라스 변환.  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$ 가 주어질 때,  $f(t)$ 를 구하라. 상세한 풀이과정을 보여라. ( $L, n$  등은 상수이다)

17.  $\frac{0.1s + 0.9}{s^2 + 3.24}$

18.  $\frac{5s}{s^2 - 25}$

19.  $\frac{-s - 10}{s^2 - s - 2}$

20.  $\frac{s - 4}{s^2 - 4}$

21.  $\frac{2.4}{s^4} - \frac{228}{s^6}$

22.  $\frac{60 + 6s^2 + s^4}{s^7}$

23.  $\frac{s}{L^2s^2 + n^2\pi^2}$

24.  $\frac{1 - 7s}{(s - 3)(s - 1)(s + 2)}$

25.  $\sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{s + k^2}$

26.  $\frac{s^4 + 6s - 18}{s^5 - 3s^4}$

27.  $\frac{1}{(s + \sqrt{2})(s - \sqrt{3})}$

28.  $\frac{2s^3}{s^4 - 1}$

### 4-2 미분, 적분과 라플라스변환

#### ■ 연습문제 5.2

초기값 문제. 다음의 초기값 문제를 라플라스 변환에 의해 풀어라(상세한 풀이과정을 보여라).

1.  $y' + 3y = 10 \sin t, \quad y(0) = 0$

2.  $y' - 5y = 1.5e^{-4t}, \quad y(0) = 1$

3.  $y' + 0.2y = 0.01t, \quad y(0) = -0.25$

4.  $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 7$

5.  $y'' + ay' - 2a^2y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 0$

6.  $y'' + y = 2 \cos t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$

7.  $y'' - 4y' + 3y = 6t - 8, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

8.  $y'' + 0.04y = 0.02t^2, \quad y(0) = -25, \quad y'(0) = 0$

9.  $y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -14$

■ 연습문제 5.4

미분에 의한 변환. 라플라스 변환을 구하라(상세한 풀이과정을 보여라).

- |                      |                  |                      |                        |
|----------------------|------------------|----------------------|------------------------|
| 1. $t e^t$           | 2. $3t \sinh 4t$ | 3. $t^2 \cosh \pi t$ | 4. $t e^{-t} \cos t$   |
| 5. $t \cos \omega t$ | 6. $t^2 \sin 2t$ | 7. $t e^{-t} \sin t$ | 8. $t^2 \cos \omega t$ |

미분 또는 적분에 의한 역변환. 식 (6) 또는 식 (1)을 이용하여 역변환을 구하라(풀이과정을 보여라).

- |                                 |                           |                                       |                                     |
|---------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 9. $\frac{1}{(s-3)^3}$          | 10. $\frac{s}{(s^2-9)^2}$ | 11. $\frac{s^2-\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2}$ | 12. $\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2}$    |
| 13. $\ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$ | 14. $\ln \frac{s+a}{s+b}$ | 15. $\frac{s}{(s^2+4)^2}$             | 16. $\text{arc cot } \frac{s}{\pi}$ |

4-3 평행이동과 라플라스변환

■ 연습문제 5.1

라플라스 변환을 구하라. (상세한 풀이과정을 보여라)

- |                                   |                                  |                        |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------|
| 29. $t^2 e^{-3t}$                 | 30. $e^{-\alpha t} \cos \beta t$ | 31. $5e^{2t} \sinh 2t$ |
| 32. $2e^{-t} \cos^2 \frac{1}{2}t$ | 33. $\sinh t \cos t$             | 34. $(t+1)^2 e^t$      |

역변환을 구하라. (상세한 풀이과정을 보여라)

- |                          |                                     |                                   |
|--------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 35. $\frac{1}{(s+1)^2}$  | 36. $\frac{12}{(s-3)^4}$            | 37. $\frac{3}{s^2+6s+18}$         |
| 38. $\frac{4}{s^2-2s-3}$ | 39. $\frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+1}$ | 40. $\frac{2}{s^2+s+\frac{1}{2}}$ |

4-4 특수한 경우의 라플라스변환

■ 연습문제 5.3

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \text{ 일 때} \\ 1 & t > a \text{ 일 때} \end{cases} \quad (a \geq 0)$$

라플라스 변환. 다음 함수의 개형을 그리고, 라플라스 변환을 구하라(상세한 풀이과정을 보여라).

- |                 |                     |                       |
|-----------------|---------------------|-----------------------|
| 2. $tu(t-1)$    | 3. $(t-1)u(t-1)$    | 4. $(t-1)^2 u(t-1)$   |
| 5. $t^2 u(t-1)$ | 6. $e^{-2t} u(t-3)$ | 7. $4u(t-\pi) \cos t$ |

라플라스 변환. 주어진 구간 밖에서는 영이라고 가정하고, 다음 함수의 개형을 그려라. 라플라스 변환을 구하라(상세한 풀이과정을 보여라).

- |                             |   |                                       |
|-----------------------------|---|---------------------------------------|
| 8. $t^2 \quad (0 < t < 1)$  | 9. $\sin \omega t \quad (0 < t < \pi/\omega)$ | 10. $1 - e^{-t} \quad (0 < t < 2)$    |
| 11. $e^t \quad (0 < t < 1)$ | 12. $\sin t \quad (2\pi < t < 4\pi)$          | 13. $10 \cos \pi t \quad (1 < t < 2)$ |

역변환. 라플라스 역변환을 구하고 개형을 그려라(상세한 풀이과정을 보여라).

- |                                 |                              |                            |
|---------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 14. $4(e^{-2s} - 2e^{-5s})/s$   | 15. $e^{-3s}/s^3$            | 16. $e^{-3s}/(s-1)^3$      |
| 17. $3(1 - e^{-\pi s})/(s^2+9)$ | 18. $e^{-2\pi s}/(s^2+2s+2)$ | 19. $se^{-2s}/(s^2+\pi^2)$ |

초기값 문제. 일부는 불연속 또는 충격 입력을 가진 경우. 라플라스 변환을 이용하여 다음 문제를 풀어라(상세한 과정을 보여라).

20.  $4y'' - 4y' + 37y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 10.5$
21.  $y'' + 6y' + 8y = e^{-3t} - e^{-5t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
22.  $0 < t < 1$ 일 때  $y'' + 3y' + 2y = 4t$ 이고,  $t > 1$ 일 때  $8; y(0) = 0, y'(0) = 0$
23.  $0 < t < \pi$ 일 때  $y'' + 9y = 8 \sin t$ 이고,  $t > \pi$ 일 때  $0; y(0) = 0, y'(0) = 4$
24.  $0 < t < 2$ 일 때  $y'' - 5y' + 6y = 4e^t$ 이고,  $t > 2$ 일 때  $0; y(0) = 1, y'(0) = -2$
25.  $0 < t < 2\pi$ 일 때  $y'' + y' - 2y = 3 \sin t - \cos t$ 이고,  $t > 2\pi$ 일 때  $3 \sin 2t - \cos 2t; y(0) = 1, y'(0) = 0$
26.  $y'' + 16y = 4\delta(t - \pi), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
27.  $y'' + y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
28.  $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
29.  $y'' + 2y' - 3y = 8e^{-t} + \delta(t - \frac{1}{2}), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -5$
30.  $y'' + 5y' + 6y = u(t - 1) + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

## 4-5 합성곱과 라플라스변환

### ■ 연습문제 5.5

식 (1)의 적분에 의한 합성곱의 계산. 다음을 계산하라(상세한 풀이과정을 보여라).

- |                                    |                                    |                                       |
|------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $1 * 1$                         | 2. $1 * \sin \omega t$             | 3. $e^t * e^{-t}$                     |
| 4. $\cos \omega t * \cos \omega t$ | 5. $\sin \omega t * \cos \omega t$ | 6. $e^{at} * e^{bt} \quad (a \neq b)$ |
| 7. $t * e^t$                       | 8. $u(t - 1) * t^2$                | 9. $u(t - 3) * e^{-2t}$               |

합성곱에 의한 역변환. 주어진  $H(s) = \mathcal{L}\{h\}$ 로부터 합성곱 정리에 의해  $h(t)$ 를 구하라(상세한 풀이과정을 보여라).

- |                              |  |                               |
|------------------------------|--|-------------------------------|
| 10. $\frac{6}{s(s+3)}$       | 11. $\frac{1}{s^2(s-1)}$               | 12. $\frac{1}{(s-a)^2}$       |
| 13. $\frac{1}{s(s^2+4)}$     | 14. $\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$     | 15. $\frac{s}{(s^2+\pi^2)^2}$ |
| 16. $\frac{e^{-as}}{s(s-2)}$ | 17. $\frac{\omega}{s^2(s^2+\omega^2)}$ | 18. $\frac{1}{(s+3)(s-2)}$    |

## 4-6 부분분수 분해

### ■ 연습문제 5.6

**역변환.** 부분분수 기법이나 또는 각자 가장 간단하거나 빠르다고 생각하는 방법을 사용하여 주어진 변환  $\mathcal{L}(f)$ 의 역  $f(t)$ 를 구하라. 자신이 사용한 방법을 명시하고 상세한 풀이과정을 보여라.

1.  $\frac{6}{(s+2)(s-4)}$

2.  $\frac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2 + 1)}$

3.  $\frac{s^2 + 9s - 9}{s^3 - 9s}$

4.  $\frac{s}{(s+1)^2}$

5.  $\frac{2s^3}{s^4 - 81}$

6.  $\frac{s^3 - 3s^2 + 6s - 4}{(s^2 - 2s + 2)^2}$

7.  $\frac{s^4 + 3(s+1)^3}{s^4(s+1)^3}$

8.  $\frac{s^3 - 7s^2 + 14s - 9}{(s-1)^2(s-2)^3}$

9.  $\frac{s^3 + 6s^2 + 14s}{(s+2)^4}$

## 4-7 라플라스변환에 의한 미분, 적분방정식의 해법

### ■ 복습문제

**미분방정식. 연립미분방정식.** 라플라스 변환에 의해 주어진 초기값 문제를 풀어라. 상세한 풀이과정을 보여라.

34.  $y'' + y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 2.5, \quad y'(0) = 0$

35.  $y'' + 4y = u(t - 3), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

36.  $y'' - 2y' + 2y = 8e^{-t} \cos t, \quad y(0) = 16, \quad y'(0) = -16$

37.  $0 \leq t \leq \pi$ 일 때  $y'' + 9y = 6 \sin t$ 이고,  $t > \pi$ 일 때  $0, y(0) = 0, y'(0) = 0$

38.  $y'' + 3y' + 2y = 2u(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$